Math. P. 73 b/1 Carnot

<36611338650016
<36611338650016
Bayer. Staatsbibliothek

Geometrie
der
Stellung
oder
über die Anwendung der Analysis
auf Geometrie

von
L. N. M. Carnot
Mitgliede des Nationalinstituts, der Gesellschaft der Wissenschaften zu Dijon u. s. w.

übersetzt
von
H. C. Schumacher
Ausserordentlichem Professor der Astronomie zu Kopenhagen.

ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΚΑΘΑΡΜΑΤΑ ΨΥΧΗΣ.

Erster Theil.

Mit Kupfern.

Altona,
bey J. F. Hammerich.
1810.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Dem

Könige von Dänemark

als

ein ſchwaches Zeichen ewiger Dankbarkeit

in tiefſter Ehrfurcht gewidmet

von

H. C. Schumacher.

Vorrede.

Ich lege dem Publikum hier die Ueberſetzung von

Géométrie de Poſition par L. N. M. Carnot. Paris 1803. 4. (Einleitung XXXVIII, Text 489 Seiten.)

vor. Ein Werk, das neue richtige Anſichten mit einer allgemeinen Erfindungsmethode (der Darſtellung durch Tafeln) verbindet, kurz ein Werk Carnot's durfte wohl nicht länger

mehreren entzogen werden, die der hohe Preis des Originals, oder die Sprache, davon abhielt.

Den Quartband des französischen Werks habe ich in zwey Oktavbände getheilt, von denen der erste das Original bis zur Seite 252 enthält, und ausserdem eine kurze Wiederholung der darin aufgestellten Theorie der sogenannten negativen Quantitäten. Dieser Zusatz ist aus dem

Mémoire sur la Relation qui existe entre les distances respectives de cinq points pris dans l'espace, par L. N. M. Carnot. Paris 1806. 4. (111 Seiten.)

entlehnt, von dem ich auch eine Uebersetzung liefern werde, zu der Carnot selbst mich aufgefordert hat. Er erklärt in seinen Briefen an mich diess *Mémoire* für den besten Zusatz, den er noch zu seiner Geometrie der Stellung machen könne, und bedauert, dass ihm eine

ſchwächliche Geſundheit und Geſchäfte anderer Art nicht erlaubten, beyde Werke in eins zu verſchmelzen.

Was ich in Hinſicht auf meine Arbeit anzuzeigen hätte, wäre wohl folgendes.

Im Anfange, wo der Verfaſſer die Grundſätze ſeiner Theorie entwickelt, habe ich nichts abgekürzt, am Ende aber, auch unter den Beyſpielen, manches zuſammengezogen und ausgelaſſen, was ein geübter Leſer nicht vermiſſen wird. Andere Leſer verträgt das Werk ſeiner Natur nach nicht.

Mehrere Druckfehler des Originals, auch beträchtliche, ſind von mir verbeſſert, es kann aber ſeyn, daſs ich in den Tafeln noch einen oder den andern überſehen habe. Das wird mir denn auch wohl niemand zur Laſt legen, obgleich ich nicht, wie Pinaroli in ſeiner *Antichitá di Roma*, daraus Nutzen für meine Leſer hoffe.

Circa gli errori di preyo eſſer diſcreto, perſuadentoti over io impieguto tutto il poſſibile per evitarli e ſe pure ve ne oſſerverai ſerviranno per eſſercitar la tua pazienza.

Es könnte bey einer flüchtigen Anſicht auffallen, wenn ich *poſition* durch Stellung, *quantité* durch Quantität überſetzt habe; da die Antwort aber ſchon vorne im Werke ſelbſt liegt, brauche ich ſie wohl hier nicht zu wiederholen.

Auf den Kupfern zu dieſem Theile ſteht Geometrie der Lage. Mein Herr Verleger hat ſie nämlich von einem Buchhändler aus der Rheingegend gekauft, der ſie zu einer von ihm projektirten Ueberſetzung ſtechen lieſs. Da ſie ſonſt gut gearbeitet ſind, glaubten wir dieſen kleinen Uebelſtand nicht beachten zu dürfen.

Einige Bemerkungen über die hier vorgetragene Theorie werde ich dem zweyten Theile als Anhang beyfügen, natürlich mit Rückſicht auf Buſſe's Vergleichung.

Den gröſsten Theil des erſten Theils habe ich vor drey Jahren ausgearbeitet, d. h. zu einer Zeit, wo Mathematik mir noch Erholung von andern Arbeiten war. Es iſt daher möglich, daſs er gegen das übrige Werk verliert, aber ich wage doch nicht den angeführten Grund als Entſchuldigung zu gebrauchen, da jetzt niemand lebhafter als ich überzeugt ſeyn kann, wie unſtatthaft es an und für ſich war, eine der erhabenſten Wiſſenſchaften, eine Wiſſenſchaft von dem ungeheuren Umfange, als Nebenwerk behandeln zu wollen, und ſie gelegentlich *ad recreationem animi* zu benutzen. —

Wo ich gefehlt habe, werde ich jede Zurechtweisung benutzen, eine ruhige mit Dank, eine andere, ohne mich dem Urheber sonderlich verpflichtet zu glauben,

Altona den 22. April 1808.

Schumacher.

Inhalt des ersten Theils.

Seite

Vorläufige Abhandlung 2

Erster Abschnitt.

Allgemeine Grundsätze 60

Zweyter Abschnitt.

Darstellung der Art, die Correlation verschiedener Figuren und die jedesmaligen Stellungen der verschiedenen Theile einer Figur zu finden 152

Dritter Abschnitt.

Bildung analytischer Tafeln, die geeignet sind, das Ganze der Verhältnisse, die unter den verschiedenen Theilen derselben Figur bestehen,

Seite

darzustellen, so wie auch die Modifikationen, welche die andern correlativen Figuren, sowohl von dieser ersten Figur, als auch unter einander unterscheiden 282

Kurze Uebersicht der Carnot'schen Théorie der sogenannten negativen Quantitäten 353

Geometrie der Stellung.

Vorläufige Abhandlung.

Der Titel dieses Werks kann die Mathematiker an Leibnitzens Idee einer Analysis der Lage erinnern, die aber nicht ausgeführt wurde, obgleich sie die Aufmerksamkeit der Gelehrten verdiente. „Es ist „gewiss," sagt d'Alembert, „dass die Analysis der „Lage etwas ist, das der gewöhnlichen Algebra fehlt; „und eben weil sie fehlt, scheint eine Aufgabe oft „mehr Auflösungen zu haben, als sie in den be-„schränkten Umständen, in denen man sie betrachtet, „haben soll. Freylich ist in gewisser Hinsicht dieser „Ueberfluss der Algebra, die selbst das, was man „nicht verlangt, giebt, bewundernswürdig, aber er „macht auch oft, dass eine Aufgabe, die, wenn man „ihren Ausdruck nach der Strenge nimmt, wirklich „nur eine Auflösung hat, in eine Gleichung von „mehreren Graden eingehüllt wird, und so auf ge-„wisse Art nicht aufgelöst werden kann. Es wäre „sehr zu wünschen, dass man ein Mittel fände, die „Lage mit in die Rechnung der Aufgaben zu bringen, „dadurch würden sie gröfstentheils sehr vereinfacht

„werden; doch der Zuſtand und die Natur der alge-„braiſchen Analyſis ſcheinen es nicht zu erlauben“ (*Encyclopédie*, *art. Situation*).

Der Gegenſtand dieſes Werks iſt von dem der eben erwähnten Analyſis der Lage verſchieden, aber doch mit ihm analog. Leibnitz wollte, daſs man in den Ausdruck der Bedingungen einer geometriſchen Aufgabe die verſchiedenen Stellungen der ſich entſprechenden Theile verglichener Figuren brächte, damit, indem man ſie durch ein beſonders unterſcheidendes Merkmahl trennte, ſie deſto leichter in der Rechnung abgeſondert werden könnten. Dieſe Verſchiedenheit der Stellungen nun drückt man oft durch bloſse Veränderungen der Zeichen aus, und gerade die Lehre von dieſen Veränderungen iſt der weſentliche Gegenſtand meiner anzuſtellenden Unterſuchungen, und die Lehre, welche ich Geometrie der Stellung nenne.

Die Geometrie der Stellung iſt alſo genau genommen die Lehre von den ſogenannten poſitiven und negativen Quantitäten, oder vielmehr ein Mittel ſie zu erſetzen, denn dieſe Lehre wird gänzlich darin verworfen. Schon ſeit langer Zeit hat man eingeſehen, daſs mehrere algebraiſche Formeln, deren Glieder ſich nur durch die Zeichen + und — unterſcheiden, oft analoge Eigenſchaften verſchiedener Figuren ausdrücken, deren Conſtruction weſentlich dieſelbe iſt, und die nur durch Verſetzung correſpondirender Theile ſich von einander unterſcheiden. Man verdankt Descartes dieſe ſcharfſinnige Bemerkung, aber man irrt ſich, wie ich glaube, wenn man die Fol-

gerungen daraus gar zu allgemein machen will. Ich werde hier auf die Grundſätze zurückgehen, und den Miſsbrauch zeigen, der daraus entſtehen kann.

Nichts iſt einfacher, als der Begriff negativer Quantitäten, wenn poſitive vorhergehen, die gröſser ſind als ſie; aber in der Algebra ſtöſst man jeden Augenblick auf Ausdrücke von negativer iſolirter Form, und will man genau den Sinn dieſer Ausdrücke wiſſen, ſo fehlen deutliche Grundſätze, eben weil dieſe Ausdrücke durch Verrichtungen entſtanden ſind, die ſelbſt nur für poſitive oder abſolute Quantitäten deutlich und ausführbar ſind. Auch konnten die gröſsten Mathematiker nie über die wahre Bedeutung der iſolirten negativen Quantitäten einig werden. Man darf nur auf den langen Streit zurückſehen, der ſich erſt zwiſchen Leibnitz und Bernoulli, dann zwiſchen Euler und d'Alembert, über die Frage erhob, ob die Logarithmen negativer Quantitäten wirkliche oder eingebildete wären? Obgleich er jetzt geendigt iſt, bleibt doch noch immer die Paradoxe, daſs $log\,(-2)^2 = log\,(2)^2$, da man doch nicht $2\,.\,log\,.-2 = 2\,.\,log\,.\,2$ hat, wie es die gewöhnliche Theorie der Logarithmen zu erfordern ſcheint. Aber im Grunde kann man ſich nicht über dieſen Punkt vereinigen, weil man von Sachen ſpricht, die durch ihr Weſen ſelbſt unverſtändlich ſind. Die algebraiſchen Verrichtungen, als Addition, Subtraktion u. ſ. w. ſind und können nur für die Fälle bewieſen werden, wo ſie ausführbar ſind. So kann man leicht zeigen, daſs, wenn $a > b$, man $(a-b)\,c = ac - bc$ haben müſſe, aber man kann unmöglich denſelben Satz beweiſen,

wenn $b > a$, weil man dann unmöglich begreifen kann, was $a - b$, oder $ac - bc$ seyn soll.

Um in der That eine isolirte negative Quantität zu erhalten, müsste man eine wirkliche Quantität von Null abziehen, Etwas von Nichts wegnehmen, eine unmögliche Verrichtung. Wie kann man sich also eine isolirte negative Quantität vorstellen?

D'Alembert, dem man eine besondere Behandlung des philosophischen Theils der strengen Wissenschaften verdankt, hat diese Frage bey dem Artikel *Négatif* in der Encyklopädie untersucht; nachher ist er verschiedene Mahle darauf zurückgekommen, vorzüglich in seinem *Mémoire sur les quantités négatives*, das im 8ten Theile seiner *Opuscules mathématiques* steht, wo er, wie es scheint, die Auflösung der Schwierigkeiten vor hatte, welche dieser kitzliche Gegenstand darbietet. „Es wäre zu wünschen," sagt er in der angeführten Abhandlung, „dass in den Elementar-Lehrbüchern darauf gesehen würde, die mathematische Theorie dieser Quantitäten gehörig aufzuhellen, oder zum wenigsten, dass man sie nicht so vorstellte, dass sie im Geiste der Anfänger falsche Begriffe zurücklassen muss."

Eben der grosse Mathematiker bewies vollkommen in dieser Abhandlung, auf die ich bald zurückkommen werde, das Unzureichende und Falsche der gewöhnlichen Theorien, aber er schlägt nichts vor, um sie zu ersetzen, und beschränkt sich auf wenige theilweise Erklärungen, die wenig von der Theorie selbst, die er umstösst, verschieden sind: auch scheint er selbst nicht ganz mit seinen Erklärungen zufrieden

zu ſeyn, weil er hinzufügt: „am Ende muſs ich noch „bemerken, daſs dieſe ganze Theorie von negativen „Quantitäten noch nicht genug aufgeklärt ſey.“ Derſelbe Verfaſſer drückt ſich ſo in der Encyklopädie (*art. Négatif*) aus:

„Man muſs geſtehen, daſs es nicht leicht iſt, die „negativen Quantitäten zu beſtimmen, und daſs einige „geſchickte Leute ſelbſt dazu beygetragen haben, ihn „durch nicht genaue Begriffe, die ſie davon geben, zu „verwirren. Betrachtet man die Genauigkeit und Ein„fachheit der algebraiſchen Verrichtungen an negati„ven Quantitäten, ſo iſt man ſehr geneigt zu glau„ben, daſs die beſtimmte Vorſtellung, die man mit „negativen Quantitäten verknüpfen ſoll, eine einfache „Vorſtellung ſeyn müſſe, die nicht eben erſt aus einer „weit hergeholten Metaphyſik abzuleiten ſey. Um „ihren wahren Begriff zu entdecken, muſs man gleich „anfangs bemerken, daſs die Quantitäten, welche „man negative nennt, und fälſchlich als unter o be„trachtet, ſehr oft durch wirkliche Quantitäten dar„geſtellt werden: z. B. in der Geometrie, wo die „negativen Linien von den poſitiven nur durch ihre „Lage in Hinſicht auf eine Linie oder Punkt, den ſie „mit einander gemein haben, unterſchieden ſind.“.....

„Die negativen Quantitäten zeigen wirklich in „der Rechnung poſitive Quantitäten an, die man „aber in einer falſchen Stellung angenommen hat. „Das Zeichen —, was man vor einer Quantität fin„det, dient dazu, den Irrthum, den man in der Hy„potheſe begangen, zu verbeſſern und unſchädlich zu „machen.“

„Es giebt alſo wirklich und abſolut gedacht keine „iſolirte negative Quantität: —3 abſtrakt genommen, „giebt dem Geiſte keinen Begriff; aber wenn ich „ſage, daſs jemand einem andern —3 Thaler gegeben „hat, ſo heiſst das in verſtändlicher Sprache, daſs er „ihm 3 Thaler genommen hat.“

„In einem Werke, wie dieſes, kann dieſe Vor„ſtellung unmöglich mehr entwickelt werden; aber „ſie iſt ſo einfach, daſs ich ſehr zweifle, ob man ſtatt „ihrer eine klarere und genauere geben könne. Und „ich glaube verſichern zu können, daſs ſie uns, wenn „wir ſie auf alle auflösbare Aufgaben anwenden, die „negative Quantitäten enthalten, nie verlaſſen werde.“

Es ſcheint nach dieſen Ausdrücken, daſs d'Alembert die negativen Quantitäten als wirkliche betrachtet, die man im entgegengeſetzten Sinne von den poſitiven nähme; ein Begriff, den er an andern Stellen ſiegreich bekämpft, wie wir bald ſehen werden. Doch leuchtet aus dieſen wenigen Worten eine richtige Theorie hervor, und man bedauert, daſs ſie nicht mehr in dieſem Artikel ausgeführt iſt.

Euler, der ſtets eben ſo deutlich als tiefſinnig iſt, der mit ſo vieler Geſchicklichkeit die negativen und eingebildeten Werthe gebrauchte, und der ſelbſt durch ſeine Analyſis den Streit über die Natur der Logarithmen negativer Quantitäten endigte; Euler, ſag' ich, ward ohne Zweifel durch eine ſichere Spekulation geleitet. Indeſſen ſagt er doch in ſeiner *Introduction à l'Analyſe infiniteſimale. L. II. no. 3.*, daſs die negativen Quantitäten weniger als o ſind. Aber man kann annehmen, da er in dieſem Werke ſich

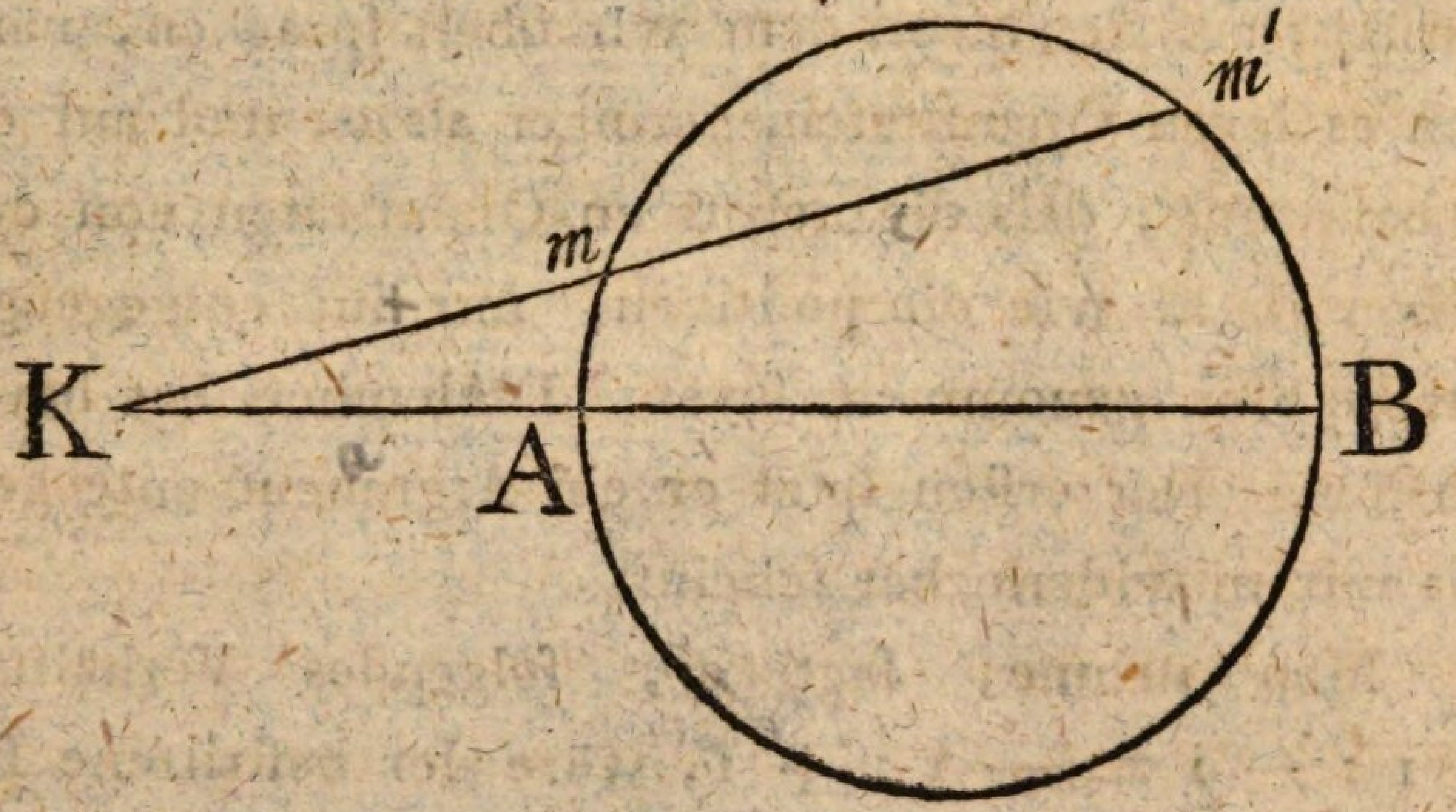
nicht besonders mit diesem Gegenstande beschäftigen wollte, dass er sich an den Begriff gehalten habe, der sich am natürlichsten darbietet, wenn ihm gleich Genauigkeit fehlt. Noch mehr, Newton selbst hatte schon diese Erklärung in seiner *Arithmetica universalis* angenommen, wahrscheinlich aus demselben Grunde.

Die Begriffe, die man bis jetzt von den isolirten negativen Quantitäten gegeben hat, kommen auf zwey zurück, auf den, von dem wir oben sprachen, nämlich es seyen Quantitäten, geringer als o, und auf die Behauptung, dass die negativen Quantitäten von derselben Natur wie die positiven, nur im entgegengesetzten Sinn genommen, seyen. D'Alembert hat beyde zerstört. Der ersten setzt er ein Argument entgegen, das mir unwiderlegbar scheint.

Man nehme, sagt er, folgendes Verhältniss $+1 : -1 = -1 : +1$, wäre der bestrittene Begriff genau, d. h. wäre -1 kleiner wie o, so würde es um so eher auch kleiner als 1 seyn, also würde das zweyte Glied dieser Proportion kleiner als das erste, und daher das vierte kleiner als das dritte seyn, d. h. $+1$ müsste kleiner als -1 seyn: also wäre -1 zugleich kleiner und grösser als $+1$, was sich widerspricht.

Den zweyten der vorher gegebenen Begriffe giebt d'Alembert mit demselben Glücke in der angeführten Abhandlung über die negativen Quantitäten an, und doch, weil er nichts hat, was er an die Stelle setzen könnte, scheint er ihn zum Grund anzunehmen und bloss zeigen zu wollen, dass er verschiedenen Ausnahmen unterworfen sey. Es ist um so nöthiger,

ſagt er, dieſen Satz zu beweiſen, da er nicht immer ſtatt hat. Aber d'Alembert ſagt nicht, wie man die Fälle unterſcheiden könne, wo man dieſe Regel richtig anwendet, und nach den Gründen und Beyſpielen, die er giebt, iſt ſie offenbar unbeſtimmt oder vielmehr ganz falſch. Hier nur ein Beyſpiel, einfach und treffend, das allein genug iſt, dieſe ganze Lehre umzuſtoſsen. Man wird im Werke ſelbſt viele finden.



Von einem Punkte K, den man auſserhalb eines gegebenen Cirkels annimmt, ſoll man eine gerade Linie $\overline{Kmm'}$ ziehen, ſo daſs der vom Cirkel abgeſchnittene Theil $\overline{mm'}$ einer gegebenen Linie gleich ſey.

Von dem Punkte K, durch das Centrum des Cirkels, ziehe man die gerade Linie $\overline{KAB}$, welche den Umkreis in A und B trifft.

Es ſey $\overline{KA} = a$, $\overline{KB} = b$, $\overline{mm'} = c$, $\overline{Km} = x$, ſo hat man nach den Eigenſchaften des Cirkels

$$ab = x(c + x) = cx + xx;$$

alſo $xx + cx - ab = 0$, oder $x = -\frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + ab\right)}$,

folglich hat x zwey Werthe; der erſte, der poſitiv

ist, löst ohne Schwierigkeit die Frage auf; aber was bedeutet der zweyte, der negativ ist? Es scheint, dass er nur dem Punkte m' entsprechen könne, wo $\overline{Km'}$ zum zweyten mahle den Umkreis schneidet, aber sucht man geradezu Km', indem man diese Linie als unbekannt nimmt $= x$, so hat man

$$ab = x(x - c) \text{ oder } x = \frac{c}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + ab\right)}$$

dessen positiver Werth genau derselbe ist, der sich im ersten Fall mit dem negativen Zeichen darstellte. Also obgleich von den zwey Wurzeln der Gleichung $x = -\frac{1}{2}c \pm \sqrt{(\frac{1}{4}c^2 + ab)}$ eine positiv, die andere negativ ist, müssen sie doch beyde nach derselben Richtung in Bezug auf den festen Punkt K genommen werden. Also führt die Regel, vermöge der diese Wurzeln nach entgegengesetzten Richtungen genommen werden sollen, zu falschen Resultaten. Nimmt man im Gegentheil den festen Punkt K auf dem Durchmesser $\overline{AB}$ selbst und nicht auf seiner Verlängerung, so würde man für x zwey positive Werthe finden, und doch müsste man sie in entgegengesetzter Richtung von einander nehmen. Die Regel ist also auch falsch für diesen Fall.

Sagt man, dass dieser Grundsatz (dass die positiven und negativen Wurzeln in entgegengesetzter Richtung genommen werden müssen) nicht so zu verstehen sey, so frage ich, wie man ihn denn verstehen soll? Und eben daraus, dass er einer Erklärung bedarf, um nicht in der natürlichsten Bedeutung genommen zu werden, schliesse ich, dass er dunkel und unbestimmt sey.

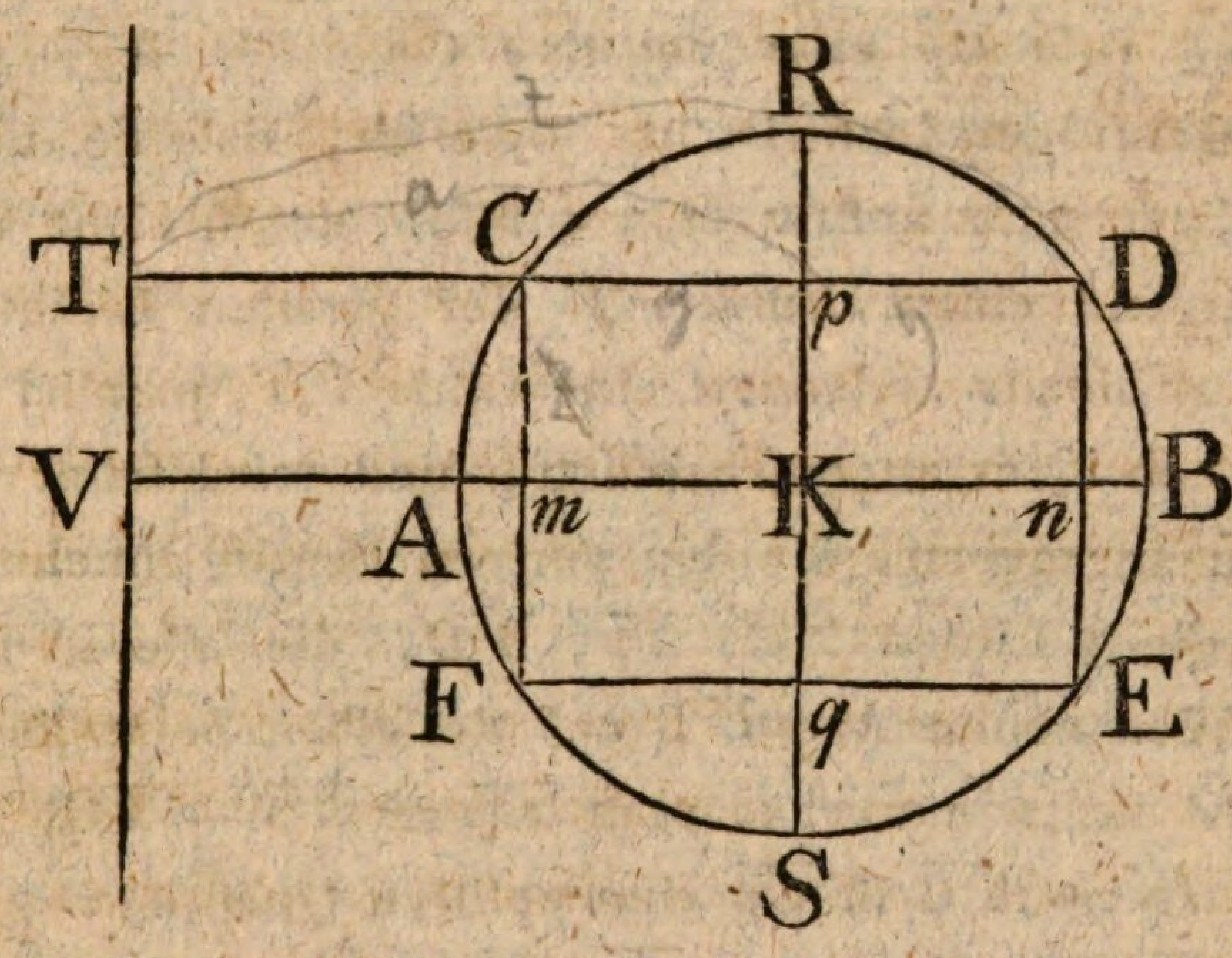
Dieſen Argumenten, welche d'Alembert gegen beyde vorher gegebene Begriffe aufſtellt, werde ich noch einige andere beyfügen, die mir eben ſo überzeugend ſcheinen.

Gleich anfangs behaupte ich, daſs der erſte dieſer Begriffe ungereimt iſt, und um ihn zu zerſtören, will ich nur bemerken, daſs man in einer Rechnung keine Quantität, die Null iſt, in Vergleich mit denen, die es nicht ſind, zu beachten braucht, alſo noch viel weniger die, welche kleiner als o ſind; d. h. die negativen Quantitäten. Da dies nun gewiſs falſch iſt, ſo ſind die negativen Quantitäten nicht kleiner als o.

Eine Menge Paradoxen oder vielmehr handgreifliche Ungereimtheiten entſtehen aus demſelben Begriffe, z. B. $-3 < +2$ und doch $(-3)^2 > 2^2$, weil $(-3)^2 = 9$ und $2^2 = 4$; d. h. unter zwey ungleichen Quantitäten 2 und -3, wäre das Quadrat der gröſsern kleiner als das Quadrat der kleinern, und umgekehrt, was gegen alle deutliche Vorſtellungen anſtöſst, die man ſich von der Quantität bilden kann.

Wir wollen zum zweyten Begriff übergehen, nach dem wir uns den Unterſchied der negativen von den poſitiven Quantitäten nur darin denken müſſen, daſs ſie in entgegengeſetzter Richtung von einander genommen werden. Dieſe Vorſtellung iſt ſinnreich, aber eben ſo wenig richtig, wie die vorige. Denn wenn zwey Quantitäten, eine poſitive und eine negative, gleich wirklich wären, und ſich nur durch ihre Stellung unterſchieden, warum wäre die Wurzel der einen eine eingebildete, und die der

andern eine wirkliche Quantität? Warum ſollte $\sqrt{-a}$ nicht eben ſo wirklich als $\sqrt{+a}$ ſeyn? Kann man eine wirkliche Quantität begreifen, deren Quadratwurzel man nicht ausziehen könnte? Und woher käme das Privilegium der erſtern $-a$, ihr Zeichen dem gemeinſchaftlichen Produkt $-a \times +a$, zu geben? Der Ausdruck Quantitäten in entgegengeſetzter Richtung von einander genommen, iſt alſo zum wenigſten ſehr unbeſtimmt, und führt zu einer unauflösbaren Verwirrung der Vorſtellungen. Aber ich gehe noch weiter, ich beweiſe, daſs der Begriff vollkommen falſch iſt, und daſs, wenn man ihn zulieſse, die gröſsten Ungereimtheiten daraus entſtehen würden.



ACRDBESF ſey eine beliebige Curve, z. B. ein Cirkel, in deſſen Ebene man zwey Axen ſenkrecht auf einander zieht *AB*, *RS*, die ſich im Punkte *K* ſchneiden, den man als Urſprung der Abſciſſen annimmt. Aus *C*, einem beliebigen Punkte der Curve, ziehe man die Ordinate $\overline{Cp}$, und verlängere ſie bis *D*. Iſt dies geſchehen, und betrachtet man nach

dem vorigen Begriffe $\overline{pD}$ z. B. als positiv, so wird $\overline{Cp}$ negativ seyn und man hat $\overline{Cp} = -\overline{pD}$, also $\overline{Cp} + \overline{pD}$, oder $\overline{CD} = 0$; was ungereimt ist. Aus eben dem Grunde, wenn man aus demselben Punkt C, $\overline{Cm}$ perpendikulair auf $\overline{AB}$ zieht, und diese Linie bis F verlängert, hat man $\overline{mF} = -\overline{Cm}$, also $\overline{Cm} + \overline{mF}$, oder $\overline{CF} = 0$, ein eben so ungereimtes Resultat. Noch mehr, weil $\overline{CD} = 0$, $\overline{CF} = 0$, so hat man $\overline{CD} . \overline{CF} = 0$, das heisst den Flächeninhalt des Rectangels $CDEF = 0$, daraus würde z. B. folgen, dass das in einen Cirkel beschriebene Quadrat (also jedes) $= 0$ sey. Das sind die Irrthümer, die durchaus aus dem vorigen Begriff folgen. Es ist also falsch, dass $\overline{Cp}$ eine negative Quantität sey, und man kann geradezu leicht beweisen, dass sie nothwendigerweise positiv seyn müsse: denn zieht man aus irgend einem Punkte V der geraden Linie $\overline{AB}$ über A hinaus verlängert eine Linie $\overline{VT}$, parallel mit $\overline{KR}$, so ist es augenscheinlich, und wird selbst von denen zugegeben, die den vorigen Begriff annehmen, dass die 3 Linien $\overline{TC}$, $\overline{Tp}$, $\overline{TD}$, die alle in Hinsicht der neuen Axe $\overline{VT}$ auf derselben Seite liegen, positiv sind: nun hat man $\overline{Cp} = \overline{Tp} - \overline{TC}$, also weil $\overline{Tp} > \overline{TC}$ ist $\overline{Cp}$ eine positive Quantität.

Man sagt vielleicht, $\overline{Cp}$ ist positiv, wenn man es auf die Axe $\overline{TV}$ bezieht, und negativ, wenn es auf $\overline{RS}$ bezogen wird. Aber das wäre ein neues Räthsel, noch schwerer zu lösen als das erste, und dies in der Wissenschaft, deren hauptsächlichster Charakter Evidenz ist.

Um noch augenſcheinlicher zu beweiſen, wie man durch dieſen Grundſatz zum Irrthum verleitet wird, ergreife ich das vorige Argument wieder, indem ich ihm eine neue Form gebe.

Aus dem Centro K beſchreibe man einen Cirkel AS, und ziehe einen beliebigen Durchmeſſer $\overline{AB}$, ſo iſt $\overline{AB} = \overline{AK} + \overline{KB}$ (A). Nun ziehe ich durch K die Axe $\overline{RS}$ ſenkrecht auf $\overline{AB}$, dann ziehe ich durch einen beliebigen Punkt des Umkreiſes C die Sehne $\overline{CD}$ parallel mit $\overline{AB}$, und nehme an, daſs ſie die Axe $\overline{RS}$ in p ſchneidet. R ſey Urſprung der Abſciſſen, die Abſciſſe $\overline{Rp} = x$, die Ordinate $\overline{pD} = y$, und der Halbmeſſer $= a$.

Ich habe alſo $yy = 2ax - xx$, folglich $y = \pm \sqrt{(2ax - xx)}$, woraus ich nach dieſer Theorie ſehe, daſs y zwey Werthe hat, die gleich, aber gerade entgegengeſetzt ſind; der eine $\overline{pD}$, welchen die poſitive Wurzel darſtellt, der andere $\overline{Cp}$, der durch die negative Wurzel ausgedrückt wird, d. h. wir haben

$\overline{pD} = + \sqrt{(2ax - xx)}$ und $\overline{Cp} = - \sqrt{(2ax - xx)}$; Gleichungen, die für jeden Werth von $\overline{Rp}$, oder x ſtatt haben müſſen. Nimmt man alſo $\overline{Rp} = \overline{RK}$ an, oder $x = a$; ſo wird $\overline{pD}$ $\overline{KB}$, und $\overline{Cp}$ wird $\overline{AK}$; folglich werden die Gleichungen $\overline{KB} = + a$, und $\overline{AK} = - a$. Setzen wir dieſe Werthe von $\overline{AK}$, $\overline{KB}$ in die Gleichung (A), ſo wird $\overline{AB} = 0$. Ein abſurdes Reſultat, das aber ſtrenge aus dieſer Theorie deducirt iſt. Alſo iſt dieſe Theorie vollkommen falſch. Es wäre vielleicht möglich, gegen meine Argumente metaphyſiſche Spitzfindigkeiten zu gebrauchen, aber

ich glaube nicht, daſs man deutlich und für einen mathematiſchen Geiſt befriedigend darauf antworten kann.

Die Gründe, mit denen man gewöhnlich dieſe beſtrittenen Begriffe ſtützt, haben auſserdem an ſich keinen Beſtand. Es ſey, ſagt man, eine Quantität A, von der man eine kleinere Quantität a abzieht, der Unterſchied $A - a$ wird kleiner als A ſeyn. Nimmt nun a zu, ſo wird $A - a$ immer kleiner, und endlich o, wenn $A = a$, alſo, fügt man hinzu, wächſt a noch immer, ſo wird $A - a$ kleiner als o.

Aber um das Falſche dieſes Schluſſes zu zeigen, braucht man nur zu erinnern, daſs man ihn eben ſo gut auf $\sqrt{(A - a)}$ anwenden könne. In der That iſt A gegeben, ſo nimmt $\sqrt{(A - a)}$ immer mehr ab, je gröſser a wird, und wird o, wenn $A = a$; alſo müſste ſie weniger als o werden, d. h. blos negativ und nicht eingebildet, wenn a gröſser als A wird. Welches falſch iſt.

Man kann eben dies denen entgegenſtellen, die behaupten, negative Quantitäten würden im entgegengeſetzten Sinne von poſitiven genommen. Denn aus eben dem Grunde, aus dem $A - a$ bald in dieſem, bald im entgegengeſetzten Sinne genommen wird, nachdem a kleiner oder gröſser als A iſt, müſste auch $\sqrt{(A - a)}$ bald in dem einen, bald in dem andern Sinne genommen, aber nie eingebildet werden. Dies alles kommt daher, weil die Betrachtung gleich anfangs weſentlich $A \geqq a$ vorausſetzt. Man verfällt alſo nachher in Widerſpruch, wenn man annimmt, daſs a gröſser werden kann als A; und der daraus

gezogene Schluſs iſt falſch, weil er A zugleich gröſser und kleiner als a annimmt.

Dieſer Widerſpruch, in den die verfallen, die die wirkliche Exiſtenz der negativen Quantitäten annehmen, iſt augenſcheinlich, von welcher Seite man auch die Sache anſehen mag. Wir wollen annehmen, m, n ſeyen zwey beliebige veränderliche, anfangs ſey $m > n$, und $m - n = y$. Nun wollen wir uns vorſtellen, daſs das Syſtem ſich ſo ändere, daſs $n > m$ werde, ſo ſchlieſsen die, welche die wirkliche Exiſtenz der negativen Quantitäten annehmen, folgendermaſsen:

Weil n gröſser als m geworden iſt, ſo iſt auch $m - n$ augenſcheinlich negativ geworden, iſt alſo $m - n$, y, ſo iſt y auch negativ, alſo muſs man in die Gleichung $-y$ für $+y$ ſetzen, alſo muſs dieſe Gleichung $m - n = -y$ oder $y = n - m$ werden; alſo iſt der wahre Werth von $y = n - m$.

Die Antwort auf dieſe Schlüſſe iſt ſehr einfach; denn da n nach der Hypotheſe $> m$ geworden iſt, ſo iſt $n - m$ auch poſitiv, alſo iſt y, welches man $= n - m$ fand, auch poſitiv, und nicht negativ, wie man es annahm.

Aber, wird man ſagen, wie kommen wir, indem wir, wie oben, von der Vorausſetzung ausgehen, daſs y negativ ſey, auf ein ganz entgegengeſetztes Reſultat? Weil in den neuern Schlüſſen noch ein Widerſpruch iſt. Denn weil y negativ war, ſchloſs man, man müſſe in die Gleichung $-y$ ſtatt $+y$ ſetzen; dies iſt aber nicht der Fall, denn y hört nicht auf, indem es negativ wird, gleich $m - n$ zu ſeyn,

was auch negativ ist. Ist y, wie man will, negativ, so muss $-y$ positiv seyn. Also, indem man $-y$ für $+y$ setzt, verfällt man wieder in einen Widerspruch, denn man erhält so $-y = m - n$, aber $m - n$ ist negativ, und wir haben eben gesehen, dass $-y$ positiv ist. Also sollte die Gleichung statt haben, so müsste eine positive Quantität einer negativen gleich seyn, was ungereimt ist.

Vielleicht sagt man noch, was schaden die fehlerhaften Schlüsse, wenn das daraus gezogene Resultat genau und ein Mittel zur Vereinfachung ist? Es ist ja gewiss, dass, wenn $n > m$, das erhaltene Resultat $y = n - m$ genau ist.

Das ist wahr. Aber dies Resultat ist nur zufällig genau, und weil in den Schlüssen verschiedene Widersprüche sind, die sich einer den andern zerstören. Weil das aber nicht immer der Fall ist, so kommt man dann, wie wir vorher sahen, auf falsche Resultate. Noch mehr, hat man einmahl den Begriff angenommen, so ist man desto sicherer sich zu irren, je richtiger man schliesst. Man muss also einem Begriff entsagen, der so sehr geschaffen ist, Irrthum herbeyzuführen. Auch ist die angeführte Vereinfachung nichts weniger als wirklich. Denn im Gegentheil, die vorigen Schlüsse haben uns nur durch Umwege auf ein an sich evidentes Resultat geführt: nämlich dass der Unterschied y von m und n, der $m - n$ ist, wenn $m > n$, invers wird, d. h. $n - m$, wenn im Gegentheil $n > m$.

Dieser doppelte Irrthum, von dem wir sprachen, wird von denen selbst eingestanden, die den Begriff der

der negativen Quantitäten annehmen, was fie dadurch ausdrücken: die Rechnung verbeffere von felbft die falfchen Hypothefen, auf die man fie gegründet haben könnte. Aber ift die Hypothefe, von der man ausging, falfch, fo ift fchon ein Irrthum begangen, und verbeffert die Rechnung ihn, fo kann dies nur durch einen zweyten gefchehen. Denn geht man von einem falfchen Grundfatz aus, fo ift man defto ficherer, auf ein eben fo falfches Refultat zu kommen, je beffer man fchliefst. Alfo nur ein neuer entgegengefetzter Irrthum kann den erften verbeffern. Z. B. man hat $cos(a+b) = cos\,a \,.\, cos\,b - sin\,a \,.\, sin\,b$; da aber diefe Formel blos für den Fall aufgeftellt ift, wo a, b, und $a+b$, Winkel find, die kleiner als ein Viertheil des Umkreifes find, fo wird fie falfch, wenn man das Gegentheil annimmt.

Indeffen die, die den Begriff der negativen Quantitäten zulaffen, betrachten diefe Formel als allgemein, und auf alle Fälle anwendbar; da diefe Vorausfetzung aber nicht richtig ift, fo verbeffern fie den Irrthum dadurch, dafs fie fagen, $cos\,a$ und $cos(a+b)$ würden beyde negativ, man müffe alfo ihr Zeichen von $+$ in $-$ ändern, was folgendes Refultat giebt:

$$cos(a+b) = cos\,a \,.\, cos\,b + sin\,a \,.\, sin\,b.$$

Das Refultat ift wahr, aber eben weil es wahr ift, beweift es, dafs die Vorausfetzung: $cos\,a$ und $cos(a+b)$ feyen negativ, ein neuer Irrthum ift. Denn wäre es das nicht, fo hätte nichts das Refultat der falfchen Hypothefe erfetzt, die gleich anfangs gemacht ward, nämlich dafs die Formel auf alle Fälle anwendbar fey. Der Beweis, dafs fie es nicht war, ift, dafs fie,

wie man sieht, für den neuen Fall wirklich verschieden ist. Davon kann man sich leicht überzeugen, wenn man sie geradezu durch die gewöhnliche Methode und durch blosse Synthesis sucht, d. h. ohne den Begriff der negativen Quantitäten zu gebrauchen; eine Methode, die freylich nicht so schnell ist, wie die Analysis, aber deren Resultate doch wenigstens von niemand bestritten werden.

So sind die häufig gebrauchten Formeln

$$\cos(\pi + a) = -\sin a, \quad \sin(2\pi + a) = -\sin a$$

und dergleichen, wo π den vierten Theil des Umkreises bedeutet, falsche Gleichungen, die nur als simple algebraische Formen gebraucht werden können, und eben deswegen, weil sie falsch sind, einen begangenen Irrthum verbessern. Sie verbessern ihn wirklich in gewissen Fällen, indem sie anzeigen, was man statt der wahren Quantitäten $\cos(\pi + a)$, $\sin(2\pi + a)$ setzen müsse, wenn man durch einen ersten Irrthum dieselben Quantitäten $\cos(\pi + a)$, $\sin(2\pi + a)$ für $\cos a$, $\sin a$, in Formeln gesetzt hat, die nur für die letzten gefunden waren, und die unmittelbar und ohne Modifikationen nur auf die anwendbar sind. Diese Ausdrücke, so wie $-\sin a$, sind das, was ich Werthe der Correlation der Quantitäten nenne, statt deren man sie in die Urformeln setzen muss. So sind diese Werthe der Correlation nichts anders, als blosse algebraische Formen, die, in die Urformeln, statt der wahren Quantitäten, die sie vorstellen, gesetzt, diese Formeln, auf anfangs nicht vorhergesehene Fälle anwendbar machen, d. h. auf andere, als auf welche die Betrachtungen bey der Stel-

lung in Gleichung, oder bey dem Ausdruck der gegebenen Bedingungen gegründet waren. Aus dieſem Geſichtspunkt betrachtet, ſind dieſe algebraiſchen Formen ſehr nützlich, man muſs nur die Fälle genau beſtimmen, wo ſie paſſend gebraucht werden können. Und das bleibt mir zu unterſuchen.

Jetzt, nachdem ich gezeigt habe, wie falſch und dunkel die gewöhnlich angenommenen Begriffe von ſogenannten negativen Quantitäten ſind, bleibt mir nur übrig, die wahren Grundſätze der ſie betreffenden Lehre aufzuſuchen.

Hierzu nehme ich das vorige Beyſpiel wieder. Es ſey alſo überhaupt y die Ordinate irgend eines Punktes, in Bezug auf $\overline{RS}$ genommen, z die Ordinate deſſelben Punktes, in Bezug auf $\overline{VT}$, und die Beſtändige $\overline{Tp} = a$. Die vorigen Gleichungen geben uns alſo für den Punkt D, $y = z - a$, und für den Punkt C, $y = a - z$; daraus hat man geglaubt ſchlieſsen zu können, daſs, da $a - z$, $z - a$ negativ genommen iſt, y in der That negativ werde, wenn man vom Punkte D zum Punkte C gehe. Aber der Fehlſchluſs iſt leicht zu erkennen. Sollte y negativ werden, wenn es $a - z$ wird, ſo müſste z gröſser als a bleiben. z wird aber im Gegentheil kleiner als a; alſo iſt $a - z$ dann poſitiv, alſo iſt y immer poſitiv, es mag den Punkt C, oder den Punkt D betreffen. Aber weil man im erſten Fall $y = z - a$ hat, und im zweyten $y = a - z$, ſo ſieht man, daſs, um von der Betrachtung des Punktes D zu der des Punktes C zu gehen, man in die Gleichung $-(z - a)$ ſtatt $+(z - a)$, oder $-y$ ſtatt $+y$ ſetzen müſſe. Dieſe Veränderung

beweiset also nicht, dass y eine negative Quantität geworden sey, sondern bloss, dass von den beyden Quantitäten a, z, deren Unterschied es ist, die, welche die grösste ist, wenn y zu D gehört, die kleinste wird, wenn y zu C gehört.

Daraus schliesse ich:

1) dass jede isolirte negative Quantität nur ein Geschöpf des Verstandes sey, und dass die, welche man in der Rechnung findet, blosse algebraische Formen seyen, unfähig, irgend eine wahre und wirkliche Quantität vorzustellen;

2) dass jede dieser algebraischen Formen, wenn man von ihren Zeichen abstrahirt, nichts als der Unterschied zweyer andern absoluten Quantitäten sey, von denen die, welche für den Fall, auf den man die Betrachtung gegründet hat, die grösste war, die kleinste für den Fall ist, auf den man die Resultate der Rechnung anwenden will.

Dieser Grundsatz entspricht allem, und hebt jede Art von Schwierigkeiten, ohne dass es nöthig sey, diese abstrakten Begriffe einzumengen, über die die Mathematiker sich nicht vereinigen können. Geht man auf einfache und verständliche Vorstellungen zurück, so sieht der Geist natürlich ein, dass es in der That keine anderen Quantitäten geben könne, als die, welche man absolute nennt, und dass die Zeichen, die vielleicht vor ihnen stehen, keine Quantitäten, sondern nur Verrichtungen bedeuten. So bilden diese

Zeichen zuſammen, mit dieſen Quantitäten genommen, keine neuen Quantitäten, ſondern complexe algebraiſche Formen.

Sagt man alſo von einer Quantität, daſs ſie negativ wird, ſo braucht man einen uneigentlichen Ausdruck, der leicht auf Irrthum führen kann, wie man ſchon vorher geſehen hat; der wahre Sinn, den man mit dieſem Ausdruck verbinden muſs, iſt, daſs dieſe abſolute Quantität nicht zu dem Syſtem gehöre, auf das die Betrachtungen gegründet ſind, ſondern zu einem andern, das mit dem erſten in einer gewiſſen Verbindung ſteht; ſo daſs, um darauf die, für das erſte Syſtem gefundenen, Formeln anwendbar zu machen, man das Zeichen, was vorhergeht, von $+$, in $-$ verändern muſs.

Aber daher, daſs man $-y$ ſtatt $+y$ ſetzen muſs, folgt nicht, daſs die durch y vorgeſtellte Quantität negativ geworden ſey, ſondern bloſs, wie ich bewieſen habe, daſs ſie der Unterſchied zweyer andern Quantitäten a, z, iſt, von denen die, welche in dem Syſtem, auf das die Betrachtungen gegründet, und für das die Formeln gefunden ſind, die gröſste war, in dem Syſtem, auf das man dieſe Formeln anwenden will, die kleinſte geworden iſt. Denn da, nach der Hypotheſe, die durch y vorgeſtellte Quantität beſtändig der Unterſchied zweyer Quantitäten a, z, iſt, ſo wird ſie bald $a-z$, bald $z-a$ ſeyn, nachdem z kleiner oder gröſser als a iſt, aber in allen Fällen wird ſie die gröſsere dieſer Quantitäten, weniger die kleineren, und folglich immer poſitiv ſeyn. Eben ſo wird der Ausdruck $-y$ immer nur eine algebraiſche

Formel feyn, an fich unbedeutend, aber die die Eigenfchaft hat, dafs, wenn fie in die gefundenen Formeln ftatt $+y$ gefetzt wird, fie diefe Formeln auf gleich anfangs nicht beachtete Fälle, oder die wenigftens nicht in der Zahl derer find, auf die die Betrachtungen urfprünglich gegründet waren, anwendbar macht.

Man wirft mir vielleicht ein, wenn die negativen Quantitäten ungereimte Wefen wären, fo könnten fie nie die wahre Auflöfung der in Gleichung geftellten Aufgabe geben. Und doch ift es ausgemacht, fährt man fort, dafs, wenn y eine unbekannte Linie ift, und für fie ein negativer Werth gefunden wird, man die wahre Auflöfung der in Gleichung geftellten Aufgabe erhält, wenn man den abfoluten gefundenen Werth nach einer Richtung trägt, die der, welche man annahm, gerade entgegengefetzt ift. Alfo, fchliefst man, ift diefe abfolute Quantität, in einer Richtung genommen, die der angenommenen entgegen ift, nichts anders, als der, durch die Gleichung gegebene, negative Werth felbft.

Hierauf antworte ich, dafs die als beftändig angeführte Thatfache ganz falfch ift, dafs man in keinem Fall die wahre Auflöfung der in Gleichung gefetzten Aufgabe erhalten kann, wenn man die negativen Wurzeln nach einer Richtung trägt, welche der angenommenen gerade entgegengefetzt ift, dafs man fo immer die Auflöfung einer andern Aufgabe erhält, die mehr oder weniger mit der, die man wirklich in Gleichung gefetzt hat, einerley ift, aber die fich immer von ihr durch irgend eine befondere

Bedingung unterſcheidet. Was hier leicht täuſcht, iſt, daſs man bisweilen, wenn man die negative Wurzel nach entgegengeſetzter Richtung trägt, in der That eine von den Auflöſungen der vorgenommenen Aufgabe erhält, und indem man dieſe mit der in Gleichung geſetzten verwechſelt, auf die letzte anwendet, was nur für die erſte wahr iſt. Denn dann iſt die in Gleichung geſetzte Aufgabe nicht die angenommene, ſondern nur ein beſonderer Fall von ihr, und dieſer beſondere Fall gerade wird nicht durch die negativen Wurzeln aufgelöſt. So alſo, indem man die negativen Wurzeln nach entgegengeſetzter Richtung trägt, löſt man nicht die in Gleichung geſetzte Aufgabe auf, ſondern andere, beſondere Fälle einer allgemeinern Aufgabe.

Der Irrthum, der daraus entſteht, daſs man nicht Sorge trägt, die wirklich in Gleichung geſetzte Aufgabe von der vorgenommenen Aufgabe zu unterſcheiden, muſs um ſo viel eher gerügt werden, je leichter man ihn überſieht, und weil aus ihm die ganze falſche Theorie der ſogenannten negativen Quantitäten entſtanden iſt.

Eine Folge dieſes Irrthums iſt es, daſs man ohne weitern Grund annimmt, dieſelbe Gleichung könne ohne alle Modifikationen auf alle Gegenden des Raums angewendet werden; z. B. eine zwiſchen zwey Veränderlichen gegebene Gleichung könne, ohne Unterſchied, auf Punkte, die rechts oder links, unten oder oben an den Axen der Curve liegen, deren Natur ſie ausdrückt, angewendet werden. Das iſt ſehr bequem, aber nicht wahr. Es als Grundſatz aufſtellen

heifst eben fo viel, als die zu unterfuchende Sache annehmen. Man fieht leicht, dafs, wenn man das Recht hätte, die gegebene Gleichung, ohne alle Modifikation, auf alle Gegenden der Curve anzuwenden, eben dadurch die Ordinaten links von der Axe der Abfciffen genommen $-y$, und die Abfciffen unter der Axe der Ordinaten genommen $-x$ feyn würden. Aber wir haben bewiefen, dafs $-x$ und $-y$ blofse Gefchöpfe des Verftandes find, d. h. blofse algebraifche Formen, die keine wirkliche Quantität vorftellen können. Alfo ift man nicht berechtigt, ohne Modifikation die gegebene Gleichung auf alle Gegenden der Curve anzuwenden.

Man mufs alfo allen Begriffen von negativen Quantitäten, als wirklichen Wefen, entfagen, und fich darauf befchränken, fie fo, wie fie find, zu betrachten, d. h. wie blofse algebraifche Formen, die geeignet find, die Formeln, welche wirklich die Bedingungen ausdrücken, auf Fälle anwendbar zu machen, die nicht in dem Ausdruck diefer Bedingungen begriffen find. Man glaube ja nicht, dafs aus diefer Art, die negativen Quantitäten zu betrachten, irgend eine Verwickelung in der Rechnung entftehe. Nichts wird dadurch bey dem Verfahren geändert, alles kommt darauf zurück, eine einfache und richtige Vorftellung ftatt einer falfchen und unnützen zu fetzen, und das ift der Zweck diefes Werks. Ich glaube ihn erfüllt zu haben, indem ich für den beftrittenen Begriff von pofitiven und negativen Quantitäten, den Begriff der Quantitäten gefetzt habe, die ich d i r e k t e und i n v e r f e nenne.

Diese Quantitäten, die ich direkte und inverse nenne, sind gewöhnliche oder absolute Quantitäten, wo jede aber als der veränderliche Unterschied zweyer andern Quantitäten betrachtet wird, von denen jede wechselsweise bald gröſser, bald kleiner als die andere wird. Wenn die, welche gleich anfangs die gröſsere war, d. h. in dem Systeme, auf welches man die Betrachtungen gegründet hat, beständig die gröſsere bleibt, so heiſst die Quantität, welche den Unterschied ihrer absoluten Werthe ausdrückt, eine direkte Quantität; wird sie aber kleiner, so heiſst dieser Unterschied eine inverse Quantität. So verschwindet die ganze Metaphysik der positiven und negativen Quantitäten. Es bleiben nur direkte und inverse Quantitäten noch, die eben so gut, wie alle denkbaren Quantitäten, absolut sind. Nach den verschiedenen Umständen, in denen sie sich befinden, muſs man das Zeichen, das in den Formeln vor ihnen steht, behalten oder verändern, und die Theorie dieser Veränderung nenne ich Geometrie der Stellung, weil man durch sie die verschiedenen Stellungen entsprechender Theile in Figuren derselben Art ausdrückt. So ist also das, was ich Geometrie der Stellung nenne, nichts anders als gewöhnliche Geometrie, in der die Lehre von positiven und negativen Quantitäten, durch die Lehre von direkten und inversen ersetzt ist.

De Velay, Professor der Mathematik zu Lausanne, hat sich schon in seiner *Introduction à l'Algèbre*, die 1799 herauskam, der Benennung direkter und inverser Quantitäten bedient. Ich wuſste es nicht, wie

ich mich zu denſelben Benennungen in meinem *Traité de la corrélation des figures* beſtimmte. Dieſs ſonderbare und für mich ſchmeichelhafte Zuſammentreffen beweiſt, daſs dieſe Ausdrücke bey der Behandlung dieſes Gegenſtandes ſich gleichſam von ſelbſt darbieten, zumal da die Theorie des Bürgers de Velay und die meinige durchaus nichts mehr als dieſe Benennungen gemein haben, die ſelbſt nicht einmal ganz in derſelben Bedeutung von ihm genommen werden, in der ich ſie nehme.

Den erſten Abſchnitt dieſes Werkes habe ich der Entwickelung dieſer Begriffe beſtimmt, und um daraus die wichtigſten Folgerungen zu ziehen. Ich gebe darin Beweiſe, daſs die gewöhnliche Theorie in dieſer Hinſicht wenigſtens ſehr unbeſtimmt iſt; daſs die Zahl der poſitiven oder negativen Wurzeln einer Gleichung weder die Zahl der Auflöſungen, deren die Aufgabe fähig iſt, noch die Richtung, in der ſie genommen werden ſollen, genau anzeigt; daſs bald überflüſſige da ſind, bald wirkliche unterdrückt, bald negative, die in derſelben Richtung wie poſitive genommen werden, bald ſogar poſitive, die falſch oder unbedeutend ſind. Ferner, daſs alle dieſe Wurzeln algebraiſch genau ſind, daſs man ſie durch Umformungen brauchbar machen kann, und daſs allein durch den Gebrauch dieſer negativen oder eingebildeten Formen als wirklicher Quantitäten ſich die Analyſis von der Syntheſis unterſcheidet, und einen ſo groſsen Vortheil über ſie erhält.

Mit dieſem Hauptbegriff von direkten und inverſen Quantitäten, der beſonders den Gegenſtand des

ersten Abschnittes ausmacht, verbinde ich andere, die mir den Titel dieses Werks, Geometrie der Stellung, zu rechtfertigen scheinen. Ich stelle eine Art dar, um durch besondere Charaktere und systematische Anordnung der Buchstaben, die die Hauptpunkte einer Figur bezeichnen, die Modifikationen auszudrücken, die sie durch Veränderung der Stellung dieser Hauptpunkte erdulden kann. Daraus entspringt eine Art von Mechanismus, den ich geeignet glaube, die Analogie, welche Figuren derselben Gattung unter einander verbindet, fühlbarer darzustellen, und so die für eine gefundenen Formeln nach der Reihe auf alle andern anwendbar zu machen. Die Auseinandersetzung dieser Art ist der Gegenstand des zweyten Abschnittes, dem ich nicht alle Entwickelung gegeben habe, deren er fähig ist, die er aber leicht erhalten wird, wenn die darin aufgestellten Ideen von den Gelehrten angenommen werden.

Ich weiss, dass man sehr behutsam mit der Einführung ungewöhnlicher Ausdrücke seyn muss, aber wenn sie so einfach sind, dass man sie nur ein einziges Mal zu sehen braucht, um sich nicht mehr darin zu irren, wenn dadurch Redensarten, die man alle Augenblicke gebrauchen muss, kurz und klar werden, so kann man sie, wie ich glaube, als vortheilhaft betrachten. Noch dazu habe ich einen sehr sparsamen Gebrauch von ihnen gemacht.

Unter den verschiedenen Beyspielen, die ich von meiner Theorie in diesem zweyten Abschnitte gebe, befindet sich eine allgemeine Lehre der Correlation, der Lineo-angulair-Quantitäten, d. h. der Sinus, Co-

ſinus, Tangenten, die den verſchiedenen Gegenden des Umkreiſes entſprechen. Ich glaube darin die wahre Theorie der Veränderung der Zeichen gegeben zu haben, welchen dieſe Arten von Quantitäten unterworfen ſind. Nachher komme ich auf die Methode der Alten zurück, die Bogen unmittelbar mit ihren Sehnen zu vergleichen, ſtatt mit den halben Sehnen der doppelten Bogen, was im Grunde daſſelbe iſt, aber ein natürlicheres und oft einfacheres Mittel giebt, die Verhältniſſe dieſer Quantitäten darzuſtellen. Bey derſelben Gelegenheit ſtelle ich einige Formeln auf, die, wie ich glaube, noch nicht gegeben ſind, um die Verhältniſſe, durch ſymmetriſche Ausdrücke, unter allen verglichenen Bogen darzuſtellen.

Die andern Abſchnitte ſind dazu beſtimmt, um die in den zwey erſten entwickelten Grundſätze anzuwenden, aber ich habe dabey noch eine andere Abſicht gehabt, die mir eben ſo wichtig ſchien, die nämlich, eine Methode zu erklären, vermöge der man durch analytiſche Tafeln das Ganze der Eigenſchaften irgend einer vorgeſtellten Figur entwickeln, und gleichſam ſo eine vollſtändige Aufrechnung dieſer Eigenſchaften, ſo wie der Eigenſchaften aller Figuren, die ſich auf ſie beziehen laſſen, machen kann.

Hierzu betrachte ich dieſe Figur gleich Anfangs als einen Ausdruck der Vergleichung, oder als eine Urfigur, und nenne correlative Figuren diejenigen, die man mit ihr vergleichen will.

In der Urfigur ſelbſt nehme ich aus den Quantitäten, aus denen ſie beſteht, ſo viel als nöthig ſind, um aus ihnen die übrigen zu beſtimmen. Habe ich dieſe

meine Grundstützen erwählt, so drücke ich alle andere Theile dieses Ursystems bloss in Werthen von ihnen aus, und bilde so die allgemeine Tafel. Diese Tafel umfasst augenscheinlich alle gesuchten Verhältnisse der verschiedenen Theile dieser Urfigur, weil sie das Mittel an die Hand giebt, sie alle zwey und zwey durch Hülfe der Urquantitäten zu vergleichen, die man als gemeinschaftliche Ausdrücke der Vergleichung annimmt. Da eben diese Urfigur als der wirkliche und existirende Gegenstand angenommen ist, auf den die Betrachtungen gegründet sind, so können auch die Formeln, welche die Verhältnisse seiner verschiedenen Theile ausdrücken und die allgemeine Tafel ausmachen, von der wir geredet haben, nur wirkliche und verständliche Ausdrücke enthalten, keine unausführbare Verrichtung, keine ungereimte Quantität anzeigen. Man wird also keine isolirte negative Quantität darin antreffen, weil eine solche Quantität nur ein Geschöpf des Verstandes ist, viel weniger eine eingebildete Quantität, d. h. die in diesen Formeln vorkommenden Zeichen, + und —, drücken nur darin Verrichtungen aus, die man ausführen kann, und müssen als blosse Abkürzungen betrachtet werden.

Ist diese Tafel der Eigenschaften der Urfigur einmal aufgestellt, so muss man wissen, welche Modifikationen damit vorzunehmen sind, damit sie in der Folge eben so die Eigenschaften der correlativen Figuren darstelle. Da die Construktion einer jeden von diesen wesentlich dieselbe mit der Construktion der Urfigur ist, so müssen die Formeln, die deren Eigenschaften ausdrücken, um so viel mehr Analogie mit

den Formeln der Urfigur haben, als weniger Ungleichheit unter ihnen ist; die sich entsprechenden Quantitäten müssen auf dieselbe Art, in Hinsicht auf ihre eigenthümlichen oder absoluten Werthe, sich darin verbunden finden; man braucht also nur die Verschiedenheit der Stellungen auszudrücken, und das geschieht durch die Veränderung der Zeichen, welche diese Quantitäten oder die verschiedenen Glieder der Formeln in der Tafel afficiren.

Um die Veränderungen zu entdecken, die in der That für ein bestimmtes, correlatives System statt haben müssen, so nehme ich an, dass es durch eine unmerklich fortschreitende Umformung, die nichts an den allgemeinen Grundlagen der ersten Construktion verändert, entstanden sey, eine Umformung, die nur die jedesmaligen Lagen modificirt, indem sie oben setzt, was unten, oder rechts, was links war. Aus dieser stufenweisen Bewegung folgt, dass eine Quantität des Systemes, die anfangs kleiner war als eine bestimmte andere, nachher grösser wird, und so auch umgekehrt. Nun entsteht der allgemeine Grundsatz der Veränderung der Zeichen, die in den Formeln des Ursystems statt haben muss, damit sie auf das Umgeformte oder Correlative anwendbar werden, bloss daher, und nicht, weil diese Quantitäten eine der andern entgegengesetzt seyn würden.

Im dritten Abschnitte setze ich bey verschiedenen Figuren die Tafeln ins Werk, von denen ich anfangs sprach, wodurch man nämlich das Ganze der Verhältnisse darstellen kann, die unter den verschiedenen Theilen einer jeden bestehen. Nachher füge ich jeder

die Tafel der Correlation bey, aus der man die Veränderungen ſieht, die man in der Urtafel machen muſs, um dieſe auf jedes correlative Syſtem anwendbar zu machen.

Der vierte Abſchnitt enthält neue Anwendungen derſelben Grundſätze auf Eigenſchaften, die man in den Figuren, ohne Zuziehung der Lineo-angulair-Quantitäten finden kann. Die Lineo-angulair-Quantitäten nämlich ſind Vermittler, um die Linien mit den Winkeln zu verbinden, und die Verhältniſſe, die unter ihnen beſtehen, aufzuſtellen. Aber in dieſem Abſchnitte unterſuche ich theilweiſe, von der einen Seite die Verhältniſſe, die bloſs zwiſchen den Winkeln beſtehen, von der andern die, die nur unter den Linien ſtatt haben; ich gebe darin den Begriff des Mittelpunktes der mittleren Entfernungen. Dabey bemerke ich, daſs dieſer Punkt mit dem Schwerpunkt in der Mechanik einerley iſt, und ſchlieſse daraus, daſs die Theorie dieſes Punktes für die Geometrie gehört, und daſs es ſehr vortheilhaft für die Ausbildung dieſer Wiſſenſchaft wäre, wenn man in dieſer Hinſicht die natürliche Reihe der Begriffe wieder herſtellte.

Im fünften Abſchnitte wende ich die vorher aufgeſtellten Grundſätze auf eine Reihe beſonderer Fragen an, die zu denen gehören, welche man auf Geometrie angewandte Algebra zu nennen pflegt. Dabey erhalte ich Gelegenheit, durch viele Beyſpiele zu zeigen, daſs die gewöhnlich angenommene Theorie über die ſogenannten poſitiven und negativen Quantitäten nicht zureicht, und daſs man durch Wahl der unbe-

kannten und gegebenen Gröſsen bisweilen, nach Leibnitzens Idee, die Stellung in den Ausdruck der Bedingungen der Aufgabe bringen, und ſo den natürlichen Grad der Endgleichung vermindern könne. Aus dieſen verſchiedenen Unterſuchungen entſpringen einige merkwürdige Formeln, z. B. die Bedingungsgleichung zwiſchen den 6 Winkeln, welche die 4 Seitenflächen einer Triangulär-Pyramide bilden.

Endlich im ſechſten und letzten Abſchnitte wende ich meine Tafeln, um das Ganze der Eigenſchaften der Zeichen darzuſtellen, auf Curven an. Ich entwickele hier den lichtvollen Wink, welchen Godin in ſeinem *Traité des propriétés communes à toutes les courbes* gab, daſs die Kunſt, Eigenſchaften der Curven zu entdecken, genau genommen nur die Kunſt ſey, das Syſtem der Coordinaten zu verändern, und ich zeige dieſe Verrichtung in verſchiedenen Beyſpielen. Meine Abſicht dabey war nicht, eine ausführliche Abhandlung über Curven zu ſchreiben, ich wollte bloſs Veränderung in die Anwendung meiner Grundſätze bringen, und zeigen, daſs man die Bildung der vorher bemerkten Tafeln auf Curven und Oberflächen eben ſo gut, wie auf gerade Linien und Ebenen anwenden könne. Man wird in dieſem Abſchnitte viele merkwürdige, und, wie ich glaube, nicht bekannte Eigenſchaften der Kugelſchnitte finden, ſo wie eine ziemlich bemerkenswerthe Theorie über die Punkte des Zuſammentreffens mehrerer Linien, und über dieſs im Gegentheil, die ſich auf derſelben geraden Linie geordnet befinden. Endlich noch mehrere Eigenſchaften der Curven überhaupt, wodurch ich

vorzüg-

vorzüglich dieſs bezweckte, ihre Gleichung unabhängig von jedem Punkt, jeder Linie, jeder Ebene, oder überhaupt von jedem feſten Gegenſtande zu machen, den man willkührlich im Raum der Curve, oder in der Curve ſelbſt, annimmt.

Der gröſste Theil der in dieſem Werke abgehandelten Fragen gehört in die Elementar-Geometrie. Aber wenn man bedenkt, daſs es eben dieſe Geometrie iſt, die ſo fruchtbar in den Händen eines Hipparchs, Archimeds, eines Apollonius war; daſs es die einzige iſt, welche Neper, Vieta, Fermat, Galilei, Pascal, Huygens und Roberval kannten; wenn man bedenkt, daſs Newton, Halley und Maclaurin ſie mit einer Art von Vorliebe bearbeiteten, ſo kann man leicht denken, daſs dieſe Geometrie ihre Vorzüge haben müſſe. In der That iſt man heutiges Tages ziemlich darüber einverſtanden, daſs der vorzüglichſte Nutzen der ſtrengen Wiſſenſchaften, wenn man ſie weiter treibt, als zum Hausbedarf der Künſte nöthig iſt, darin beſteht, den Geiſt an Betrachtung, an Genauigkeit und Verkettung der Ideen zu gewöhnen. Dieſs iſt nun vorzugsweiſe der Zweck der Geometrie der Alten. Denn heiſst ſie Elementar-Geometrie, in Hinſicht auf den Gegenſtand, mit dem ſie ſich beſchäftigt, ſo iſt ſie es doch keineswegs in Hinſicht auf ihre Schwierigkeiten, worin ſie nicht den analytiſchen Unterſuchungen weicht. Auch iſt die Metaphyſik der Wiſſenſchaften eben nicht ihr unintereſſanteſter Theil, und es iſt von groſser Wichtigkeit, alle falſchen Ideen daraus zu verbannen. Wer aber

den Gegenſtand, mit dem er ſich beſchäftigt, erſchöpfen will, für den trägt der Begriff der ſogenannten negativen Gröſsen dieſen Charakter, und doch dient er den vorzüglichſten Verrichtungen der Algebra zur Grundlage, ja die algebraiſche Analyſis beruht ganz auf ihm. Die Bemühungen, welche die gröſsten Geometer anwandten, dieſen Punkt der Wiſſenſchaft aufzuklären, und die Streitigkeiten, die er verurſacht hat, rechtfertigen hinlänglich ein Unternehmen, deſſen Hauptzweck darin beſteht, die Falſchheit und abſolute Unnützlichkeit dieſes Begriffes zu zeigen, und dafür einen andern zu ſetzen, der Einfachheit und Strenge verbinde, indem man bloſs auf die natürlichen Ideen, die ſich zuerſt jedem anbieten, zurückgeht.

Betrachtet man ferner das, was man heutiges Tages Elemente der Geometrie nennt, ſo muſs man über den eingeſchränkten Sinn, den man ihnen giebt, erſtaunen. Die Wiſſenſchaft der Projektionen, oder die beſchreibende Geometrie, iſt nicht darin begriffen, ſondern macht noch eine beſondere Wiſſenſchaft aus. Und doch was iſt mehr elementär, mehr nützlich für die Ausübung der Künſte, als gerade dieſe Lehre von den Projektionen auf horizontalen und vertikalen Ebenen? Man wendet mir vielleicht ein, daſs das keine Grundſätze der Geometrie, ſondern Theile ihrer Anwendung ſind. Das kann wahr ſeyn, aber daſſelbe kann man von vielen Sätzen ſagen, die man gemeiniglich in den Elementen antrifft. Es iſt nicht leicht, oder vielmehr, es iſt unmöglich, das, was man in

dieſer Hinſicht Grundſätze nennt, von dem zu trennen, was man Anwendung nennt. Es ſcheint, daſs das, was man Grundſätze nennt, eine Sammlung von Wahrheiten ſeyn müſſe, die, einmal recht erkannt, hinreichen, um die Anwendung auf die beſondern, gemeinſten Fälle leicht zu machen. Wenn dieſs iſt, ſo behaupte ich, daſs die gewöhnlichen Elemente nicht hinreichen, denn der Uebergang von dieſen Elementen zu der Wiſſenſchaft der Projektionen erfordert neue Lehren und beträchtliche Auseinanderſetzungen, in die man ſich hinein arbeiten muſs.

Was ich hier über die Lehre von den Projektionen geſagt habe, gilt auch von den meiſten andern Gegenſtänden der Geometrie. Z. B. die Lehre von Polygonen und Polyedern iſt kaum darin berührt. Es iſt wahr, ſie iſt, wenn man will, mit in der Trigonometrie begriffen, aber das iſt auf eine ſo implicirte Art, daſs der Uebergang von der einen zur andern, weit entfernt, als eine leichte Anwendung betrachtet werden zu können, vielmehr eine ſehr geübte Einbildungskraft erfordert. Bey alle dem ſind eine Menge auffallender und nützlicher Eigenſchaften gar nicht bemerkt. Eben ſo iſt es mit den Eigenſchaften des Schwerpunktes, der wirklich zur Geometrie gehört, und deſſen praktiſche Wichtigkeit eben ſo ausgedehnt, als unbeſtritten iſt.

Endlich, was man gewöhnlich unter dem Namen Elementar-Geometrie begreift, iſt nichts anders, als eine methodiſche Sammlung von den einfachſten und gewöhnlichſten Eigenſchaften der Figuren, die aus

geraden Linien und Umkreisen von Cirkeln bestehn. Freylich gesteht jeder, daſs auch in dieser Hinsicht nur es immer ein groſses Verdienst bleibt, gute Elemente zu machen, d. h. diese Eigenschaften auf die deutlichste und für Schüler nützlichste Weise zu sammeln, zu ordnen und zu beweisen. Aber dennoch giebt diese Geometrie, wie ich schon bemerkt habe, mag sie noch so gut geordnet seyn, als Resultat, nur eine Sammlung von Lehrsätzen, die selbst in Rücksicht auf ihren besondern Gegenstand (die gerade Linie und den Cirkel) sehr unvollständig ist. Um den Gegenstand ganz zu erschöpfen, muſs man, wie es mir scheint, zur Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe gelangen:

Wenn in irgend einem System von geraden Linien, mögen sie in derselben Ebene, oder nicht gezogen seyn, einige von ihnen, oder Winkel, die aus ihrer Versammlung entstehen, es sey zwischen ihnen selbst, oder zwischen den Ebenen, in denen sie liegen, in hinreichender Anzahl gegeben sind, um die Figur zu bestimmen, die übrigen zu finden. Nun sind die gewöhnlich sogenannten Elemente der Geometrie weit von dieser allgemeinen Aufgabe entfernt.

Man sieht hieraus, daſs es nicht darauf ankommt, die gewöhnlichen Elemente mit einer groſsen Anzahl neuer Sätze zu vermehren, so auffallend sie auch immer seyn mögen, sondern nur darauf, zur Auflösung einer allgemeinen Aufgabe zu kommen, welche sie

alle wie befondere Fälle in ihren Erklärungen enthalten, und aus der fie fich durch eine vielfache Combination von Formeln leiten laffen. Ich habe die Auflöfung diefer allgemeinen Aufgabe im fünften Abfchnitt gegeben, oder vielmehr nur angezeigt; aber um ihre Anwendung auf jede befondere Figur leichter zu machen, habe ich in den vorhergehenden Abfchnitten die Bildung einer Tafel erfunden und aus einander gefetzt, welche das Ganze der Eigenfchaften einer Figur darftellen kann, welche alle ihre partiellen Verhältniffe unter einen Gefichtspunkt bringt, und endlich, indem ich eben diefe Figur als Maafsftab zur Vergleichung brauche, habe ich durch hinzugefügte Tafeln, die ich Tafeln der Correlation nenne, alle die darauf bezogen, deren Konftruktion wefentlich diefelbe ift. Die erfte von diefen Tafeln ift nun eine vollftändige Aufzählung aller Theile (lineäre, anguläre, fuperficielle u. f. w.), welche zur Zufammenfetzung der Urfigur gehören, alle in Werthen von irgend welchen unter ihnen ausgedrückt, die in hinlänglicher Anzahl angenommen werden, damit, wenn man fie als bekannt annimmt, alle übrigen beftimmt find. Die andern, nämlich die Tafeln der Correlation, zeigen die Veränderungen an, die mit diefer Urtafel vorgehen müffen, wenn man fie auf irgend eine Figur derfelben Gattung, oder auf eine correlative anwenden will, d. h. die nicht wefentlich von der erften verfchieden ift, fondern nur durch einige Modifikationen, oder durch die Verfchiedenheit der Stellung fich entfprechender Theile fich auszeichnet.

Da nun diefe Verfchiedenheit in der jedesmaligen Stellung der fich entfprechenden Theile vorzüglich durch die Verfchiedenheit der Zeichen + und — ausgedrückt wird, fo zwingt mich die Natur meines Gegenftandes, das, was man pofitive und negative Quantitäten nennt, zu behandeln. Das habe ich nun mit einer Ausführlichkeit gethan, die freylich zu weit ginge, wenn ich nicht hier Ideen zu bekämpfen hätte, die fo allgemein angenommen find, dafs man fie beynahe für Axiomen anfehen könnte. Weil die Theorie der Veränderungen, die aus der verfchiedenen Stellung fich entfprechender Theile der Figuren einer Art entftehen, die Grundlage diefer Abhandlung ift, fo habe ich ihr den Namen, Geometrie der Stellung, gegeben. Nicht um dadurch anzuzeigen, dafs fie einen, von dem der gewöhnlichen Geometrie verfchiedenen, Gegenftand hätte, fondern nur, um die von mir vorgefchlagene Art zu charakterifiren, fowohl das Ganze der Verhältniffe der Urfigur auszudrücken, als auch die Veränderungen der Stellung, die dabey eintreffen können.

Das Fundamentalprincip meiner Theorie ift, dafs der Begriff ifolirter, negativer Quantitäten unzuläfsig fey. Alfo um die Vorftellungen genau zu beftimmen, nenne ich Geometrie der Stellung diejenige,

> in der der Begriff der pofitiven und ifolirten negativen Quantitäten durch den Begriff der direkten und inverfen Quantitäten erfetzt ift.

Diefe Begriffe find fowohl hier (in der vorläufigen Abhandlung), als auch im erften Abfchnitte

weitläuftig entwickelt. In den übrigen Theilen des Werks habe ich mich ſo viel als möglich beſchränkt, ja oft nur den Leſer auf den Weg des Beweiſes geführt, und doch iſt das Buch ſtärker, als ich mir vorgenommen hatte, geworden; denn anfangs wollte ich nur eine neue Ausgabe meines *Traité de la corrélation des figures* veranſtalten. Aber die Methode, Geometrie in Tafeln zu behandeln, eröffnet ein ſo weites und ſo fruchtbares Feld, daſs man nur mit den intereſſanten Reſultaten, die daraus entſpringen, leicht einige Bände füllen könnte. Und dieſe Reſultate finden ſich gedrängt darin, denn jede Linie einer Tafel iſt, genau genommen, ein in Formeln gebrachter Lehrſatz. Man braucht dieſe Formeln nur zu klaſſificiren und ſo zu ordnen, daſs man gleich die nöthigen finden kann, wie man z. B. in den logarithmiſchen Tafeln den Logarithmus einer Zahl findet. Noch mehr, ich glaube, daſs dieſe Methode auf alle andere Zweige der Mathematik angewendet werden kann, und weiſs, daſs ich hier nur einen ſehr unvollkommenen Verſuch gebe, aber wenn ich mich nicht irre, ſo kann dieſer Verſuch die Grundlage einer nützlichen Arbeit werden.

Die Geometrie der Stellung, welche hier abgehandelt wird, iſt nicht, was verſchiedene Gelehrte Geometrie der Lage genannt haben. Unter Geometrie der Lage verſteht man gewöhnlich eine Klaſſe von Unterſuchungen, die, obgleich aus der Sphäre der Geometrie, ſich doch nicht unter die algebraiſche Analyſis zu fügen ſcheinen; da im Gegentheil die

Geometrie der Stellung, welche ich hier behandle, nur eine Art ift, die Anwendung der Algebra auf gewöhnliche Geometrie fruchtbarer zu machen. Die Geometrie der Lage ift, fo viel ich weifs, nie befonders behandelt worden. Man findet einige Beyfpiele davon in Oranams und Montucla's *Recréations mathématiques:* dahin gehört auch eine Aufgabe, die Euler in den Abhandlungen der Akademie zu Petersburg auflöfte, nämlich, welchen Weg man bey Brücken über einen Flufs, der fich fchlängelt, zu nehmen habe, wenn man nie zweymal über diefelbe Brücke gehen darf. In diefen Zweig der Geometrie gehören auch des verftorbenen Vandermonde fcharffinnige Unterfuchungen über den Gang des Fadens, der nach und nach alle Mafchen einer geftrickten Arbeit bildet. Man fieht aus diefem letzten Beyfpiel, dafs alfo diefer Zweig der Geometrie ganz dazu geeignet ift, auf eine übereinftimmende und leichte Weife das verfchiedene Verfahren der Künfte zu befchreiben, und in diefer Rückficht kann fie unendlich nützlich werden. Aber es fcheint mir, dafs der Name, Geometrie der Stellung, weniger paffend dafür ift, wie z. B. Geometrie der Verfetzung wäre, weil in der That die Bewegung oder die Verfetzung der Theile des Syftems als ein wefentliches Element in alle folche Fragen kommt, und weil fie eigentlich zur Geometrie der Stellung fich wie Bewegung zur Ruhe verhält. Noch dazu ift fie nur der geringfte Theil einer fehr umfaffenden und wichtigen Wiffenfchaft, die noch nie behandelt ift, ich meyne überhaupt die Theorie der Bewegung,

abſtrahirt von allen Kräften, die ſie hervorbringen oder verſetzen. So z. B., wenn ich mir vornehme, mit dem Springer alle Felder des Schachbretts zu durchlaufen, ohne je zweymal über daſſelbe zu kommen, ſo iſt mir ſehr wenig daran gelegen, zu wiſſen, was die Maſſe dieſes Springers iſt, oder wie groſse Kraft ich brauchen muſs, um ihn zu bewegen. Eben ſo, wenn ein Faden die Maſchen einer Strickarbeit bildet, kommt es gar nicht auf die Geſetze der Aktion und Reaktion, noch auf die Kraft, mit der der Faden geſpannt wird, an. Derſelbe Fall tritt endlich bey allen Maſchinen ein, deren Zweck nicht Erſparung der Kraft iſt, ſondern wo nur gewiſſe Verhältniſſe zwiſchen den Richtungen und den Schnelligkeiten verſchiedener Punkte eines Syſtems aufgeſtellt werden ſollen. Ich werde in einem andern Werke auf den Begriff dieſer Bewegungen zurückkommen, deren Gränzen ich ſchon ſonſt geometriſche Bewegungen genannt habe, und deren Theorie der Uebergang von der Geometrie zur Mechanik iſt.

In dem, was ich hier Geometrie der Stellung nenne, wird keine Bewegung oder Verſetzung der Theile unterſucht, ſondern bloſs, wie ich ſchon vorher ſagte, eine neue Methode, den Anwendungen der Algebra auf die Geometrie mehr Ausdehnung zu geben, entwickelt. So habe ich alſo mit dieſem Namen eine Theorie bezeichnet,

„deren beſonderer Zweck es iſt, durch vergleichende Tafeln die verſchiedenen Stellungen ſich

entſprechender Theile der Figuren von einerley Gattung auszudrücken," nachdem vorläufig die allgemeine Tafel ihrer gemeinſchaftlichen Eigenſchaften gebildet iſt.

Das iſt denn nun der wahre und einzige Zweck des gegenwärtigen Werks.

Geometrie der Stellung.

1. Die Geometrie der Stellung unterſucht beſonders die Verbindung, welche zwiſchen den jedesmaligen Lagen der verſchiedenen Theile einer vorgegebenen Figur und ihren komparativen Werthen ſtatt findet.

Es beſtehen unter den Theilen jeder geometriſchen Figur zwey Arten Verhältniſſe, die Verhältniſſe der Gröſse und die Verhältniſſe der Stellung. Die erſten finden unter den abſoluten Werthen der Quantitäten ſtatt; die andern drücken ihre jedesmaligen Stellungen aus, indem ſie anzeigen, ob ein Punkt ſich über oder unter einer Linie, rechts oder links von einer Ebene, innerhalb oder auſserhalb eines Umkreiſes befindet. Mein Zweck iſt, dieſe beyden Anſichten der Verhältniſſe geometriſcher Quantitäten zu vergleichen und einander zu nähern.

2. Die Weiſe, die ich dabey befolgen werde, beſteht darin: Man bezieht jede Figur, deren Eigenſchaften man ſucht, auf eine andere, deren Eigenſchaften bekannt ſind, und die man als Maaſsſtab zur

Vergleichung gebraucht; dann drückt man die Modifikationen, die ſie unterſcheiden, durch die gewöhnlichen Zeichen der Algebra aus, oder durch eigene, ferner durch ſyſtematiſche Anordnung der Buchſtaben, welche gebraucht werden, um die Punkte zu bezeichnen, welche die verſchiedenen Theile dieſer Figuren beſtimmen. Das nenne ich nun die Correlation der Figuren aufſtellen.

Sind die Figuren, deren Eigenſchaften man ſucht, zuſammengeſetzt, ſo löſt man ſie in mehrere einfache auf, und vergleicht jede von dieſen mit einer bekannten Figur, die als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt.

Um einen mehr erweiterten Begriff von meinem Gegenſtande zu geben, ſo wollen wir uns irgend ein Syſtem von Quantitäten vorſtellen, die durch beliebige Verhältniſſe mit einander verbunden ſind. Man ſieht leicht, daſs eben durch dieſe Verhältniſſe es hinreichend iſt, eine gewiſſe Anzahl dieſer Quantitäten zu kennen, um alle übrigen zu beſtimmen. Drückt man die letztern nun bloſs in Werthen der erſtern aus und bildet davon eine allgemeine Tafel, ſo wird dieſe Tafel der analytiſche Ausdruck der Verhältniſſe ſeyn, die nach der Hypotheſe unter allen Quantitäten des behandelten Syſtems beſteht.

Nun ſoll ſich dieſs Syſtem vermöge eines beliebigen Geſetzes in unmerklichen Graden verändern, doch mögen unter ſeinen Quantitäten einige beſtändig bleiben. Dieſs angenommen, ſo iſt es klar, daſs, ſo wie die Umformung des Syſtems fortſchreitet, auch die Formeln der Tafel, welche die Verhältniſſe der ver-

ſchiedenen Theile ausdrücken, analoge Veränderungen erleiden werden. Dieſe Veränderungen müſſen immer merklicher werden, ſo wie ſich das umgeformte Syſtem mehr von ſeinem Urzuſtande entfernt.

3. Anfangs wird dieſe Veränderung des, was man unendlich oder unbeſtimmt klein nennt, unmerklich ſeyn, bis der Rechner der Umwandelung oder dem Wachſen der Veränderlichen einen beſtimmten Werth gegeben hat, d. h. bis er für die Quantitäten des Urſyſtems, die als Gränzen oder erſte Werthe dienten, andere Werthe annimmt, die er nach der vorausgeſetzten Veränderung des Syſtems beſtimmt. In der That, da nichts bis dahin bey den Quantitäten, die in die Formeln der Tafel kommen, die Gröſse ihrer Veränderung beſtimmt, ſo ſteht es dem Rechner frey, ſie ſo klein, als er will, anzunehmen. Aus dieſem unbeſtimmten Zuſtande des Syſtems entſteht eine zufällige ſehr wichtige Vereinfachung, nämlich die Hierarchie der Differentien von verſchiedenen Ordnungen, aus deren Entwickelung wieder die ſogenannte Analyſis des Unendlichen, eine der fruchtbarſten der Rechnungsarten entſteht. Dieſe Analyſis iſt nichts als eine groſse und glückliche Anwendung der Methode der Unbeſtimmten.

4. Aber iſt der Rechner ſo weit gekommen, für jede Quantität des Urſyſtems eine ſolche Subſtitution zu machen, d. h. hat er in den Urformeln für die dahin gehörigen Quantitäten den Werth geſetzt, welchen jede von ihnen erhielt, als das Syſtem auf irgend einen beſtimmten Zuſtand der Umformung gekommen war, ſo kann es ſeyn, daſs dieſe Umformung noch

ſo gering iſt, daſs die Geſtalt der Tafel, welche den jedesmaligen Zuſtand des Syſtems vorſtellt, noch keine Veränderung in den Zeichen erlitten hat, welche die zu den Formeln gehörigen Quantitäten verbinden, und daſs ſie bloſs in den abſoluten Werthen dieſer halben Quantitäten geändert iſt. Ich drücke dieſen Zuſtand des umgeformten Syſtems ſo aus, daſs ich es in direkter Correlation mit dem Urſyſteme nenne.

5. Ging aber die Umformung weiter, ſo können die für das Urſyſtem gefundenen Formeln nicht mehr mit ſeinem neuen Zuſtande übereinſtimmen, ohnerachtet aller Veränderungen, die man mit den abſoluten Werthen der in dieſe Formeln gehörigen Quantitäten machen könnte. Es kann auch nöthig ſeyn, um ſie für das umgeformte Syſtem paſſend zu machen, das Zeichen einer oder mehrerer dieſer Quantitäten zu verändern. Ich drücke dieſen neuen Zuſtand des umgeformten Syſtems dadurch aus, daſs ich ſage, es ſey mit dem Urſyſtem, welches immer als Maaſsſtab zur Vergleichung dient, in indirekter Correlation.

6. Die Umformung des Syſtems kann noch weiter gehen. Es kann ſelbſt unzureichend ſeyn, wie vorher das Zeichen einer oder mehrerer der Quantitäten, die ins Syſtem gehören, zu ändern, und man kann dieſe Quantitäten ſelbſt oder einige unter ihnen mit den eingebildeten Wurzeln der Einheit multipliciren müſſen. Wir werden nämlich bald ſehen, daſs es nöthig ſeyn kann, eine Quantität mit $\sqrt{-1}$, die

andere mit $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ u. ſ. w. zu multipliciren. In dieſem neuen Zuſtande ſteht das Syſtem mit dem Urſyſtem in eingebildeter Correlation.

Da man aber die Einheit als den natürlichen Coefficienten jeder Quantität betrachten darf, ſo ſieht man, daſs ihre Wurzeln, als Coefficienten gebraucht, mehr wie bloſse Zeichen, als wie Quantitäten anzuſehen ſind, denn ſie verändern nichts am abſoluten Werthe dieſer Quantitäten; ſie drücken ihnen nur das Siegel der Ungereimtheit, das ſie tragen ſollen, auf, und man kann ſie durch eine einfache algebraiſche Umformung verſchwinden laſſen. So wird z. B. $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}a$, wenn man ſie zum Cubus erhebt, $= a^3$, eben ſo, als wenn gar kein Coefficient da geweſen wäre. Die Einheit ſelbſt, die bey allen Quantitäten Coefficient iſt, kann in dieſer Hinſicht mehr wie ein Zeichen, als wie eine Quantität betrachtet werden. So werde ich alſo in der Folge die Einheit und alle ihre Wurzeln, als Coefficienten gebraucht, unter dem allgemeinen Namen algebraiſcher Zeichen umfaſſen, eben ſo wie $+$ und $-$, was ſelbſt nichts anders iſt, als die Coefficienten $+1$ und -1.

Ich muſs im Vorbeygehen in Hinſicht auf dieſe Wurzeln bemerken, daſs das Verhältniſs zweyer unter ihnen, in demſelben Grade oder nicht in demſelben Grade genommen, ihr Produkt, die verſchiedenen Potenzen oder Wurzeln einer jeden u. ſ. w. ſich immer wieder in der unendlichen Zahl dieſer halben

Wurzeln der Einheit befinden. So iſt zum Beyſpiel das Produkt aus $\sqrt{-1}$, welches eine der 4ten Wurzeln der Einheit iſt, in $\frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$, welches eine der 3ten Wurzeln iſt, auch eine Wurzel der zwölften Ordnung, weil, wenn man dieſs Produkt zur 12ten Potenz erhebt, nothwendig die Einheit wieder erſcheint.

7. Endlich kann die Umformung des Urſyſtems ſo weit getrieben werden, daſs die Veränderung einfacher dahin gehöriger Quantitäten nicht mehr hinreicht, d. h. daſs es unzureichend iſt, ſie mit -1, oder ſonſtigen Wurzeln der Einheit zu multipliciren, ſondern daſs man dieſe Zeichenveränderung nicht bey den einfachen Quantitäten, ſondern bey einigen ihrer Funktionen anbringen muſs. Dann iſt das neue Syſtem in *complexer Correlation* mit dem Urſyſtem.

8. Ungeachtet dieſer Veränderungen behält jede Quantität des umgeformten Syſtems, da ſie ſich nur in unmerklichen Graden verändert, ihre wirkliche Exiſtenz, und eine ihr entſprechende im Urſyſtem. Die Analogie beyder Syſteme beſteht immer, der Ausdruck der Quantitäten kann wohl in den Formeln mit Zeichen wechſeln, aber ihre Zahl und der Werth einer jeden bleiben. Dieſs ſind nun die verſchiedenen Syſteme (oder vielmehr, dieſs iſt daſſelbe Syſtem in dem verſchiedenen Zuſtande der Umformung betrachtet), welche ich *correlative Syſteme* nenne, indem ich durch die eben angeführten eignen Ausdrücke

drücke

drücke die mehr oder weniger entfernten Grade der Correlation bezeichne.

Es kommt alſo

1) darauf an, die analytiſche Tafel der Verhältniſſe unter den verſchiedenen Theilen des Urſyſtems zu bilden, nach gewiſſen unter ihnen beſtehenden Beziehungen;

2) eine zweyte Tafel zu bilden, welche alle Veränderungen bezeichnen ſoll, die in den Formeln der erſten Tafel aus der Umformung des Syſtems entſpringen, ſo wie es ſich von ſeinem Urzuſtande entfernt.

Dieſs iſt nun der Zweck dieſes Werkes. Der Titel zeigt, daſs ich vorzüglich dieſe letzte Tafel beabſichtige, nämlich die der Correlation der Syſteme; aber da ihre Bildung oft die vorhergehende Bildung der erſten erfordert, da man wenigſtens daraus eine groſse Hülfe in dieſer Hinſicht zieht, noch mehr, da die Methode, ſo durch eine allgemeine Tafel alle Quantitäten eines Grundſyſtems bloſs in Werthen einiger unter ihnen darzuſtellen, mir groſse Vortheile zu verſprechen ſcheint, ſo werde ich mich eben ſo viel mit der erſten, als der zweyten Tafel beſchäftigen. Im erſten Abſchnitt entwickele ich Grundſätze, die auf alle Theile der Mathematik anwendbar ſind; in den andern werde ich verſchiedene Anwendungen auf die Elementar-Geometrie und die Theorie der Curven zeigen.

Erſter Abſchnitt.

Allgemeine Grundſätze.

9. Ehe ich zum Werke ſelbſt gehe, muſs ich einen Unterſchied zwiſchen den Worten Werth und Quantität andeuten, der für das, was ich in der Folge zu ſagen haben werde, ſehr wichtig iſt.

Durch den Ausdruck Werth, verſtehe ich überhaupt jede Art algebraiſcher Funktion. So iſt a ein abſoluter Werth; $+a$ ein poſitiver Werth; $-a$ ein negativer Werth; $\sqrt{-a}$ ein eingebildeter Werth. Ich behalte mir im Gegentheil das Wort Quantität vor, um einzig und allein die Sache ſelbſt, deren Eigenſchaften man ſucht, oder ihren abſoluten Werth (d. h. wenn man vom Zeichen abſtrahirt) zu bezeichnen. Nimmt man alſo dieſe Definition an, ſo giebt es keine poſitive, keine negative und keine eingebildete Quantitäten. Jede Quantität iſt ein wirklicher Gegenſtand, den der Geiſt entweder ſelbſt, oder deſſen Vorſtellung auf abſolute Art in der Rechnung er doch faſſen kann; da hingegen die Werthe oder Funktionen nichts als bloſse algebraiſche Formen, als Quantitäten mit ihren Zeichen zuſammengenommen ſeyn

können. Nun zeigen diefe Zeichen Verrichtungen an, die oft nicht ausführbar find. Z. B. $-a$ allein zeigt an, dafs man a von o nehmen foll; was ungereimt ift, da es nichts unter o giebt.

Diefe algebraifche Formen können freylich in der Rechnung als wahre Quantitäten gebraucht werden; aber diefe Rechnung giebt nur dann verftändliche Refultate, wenn diefe Formen auf Verbindungen zurückgeführt find, die wirkliche Gegenftände darftellen, d. h. auf Formeln oder Funktionen, in denen die angezeigten Verrichtungen wirklich ausgeführt werden können. Man kann wohl in einer Rechnung die Subtraktion einer Quantität, die von einer kleineren abgezogen werden foll, anzeigen, aber man kann fie nicht ausführen. Doch kann diefs ungereimte Refultat, wenn es algebraifch ausgedrückt ift, durch Umformungen zu Refultaten einer andern Gattung führen, die nur ausführbare Verrichtungen an wirklichen Quantitäten anzeigen. Nur mit dem Fall find diefe Refultate wirklich bedeutend, und können nützlich auf den Gegenftand, den man fich vorgefetzt hat, angewendet werden.

Ich nehme z. B. an, dafs der Ausdruck der Bedingungen einer Aufgabe mich auf diefe Gleichung geführt hätte: $x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$, oder $(x-a)^2 = b$; fo ziehe ich daraus $x - a = \pm\sqrt{b}$.

Das erfte diefer Refultate, nämlich $x - a = \sqrt{b}$, giebt dem Geifte nur deutliche Vorftellungen, aber das zweyte $x - a = -\sqrt{b}$ ift unverftändlich, weil das zweyte Glied eine ungereimte Quantität oder eine blofse algebraifche Form ift, die nichts Wirkliches

ausdrückt. Doch durch die bloſse Verſetzung der Quantität a mache ich dieſs Reſultat bedeutend und nützlich für meinen Gegenſtand, weil es die aufgeworfene Frage eben ſo gut, als das erſte auflöſt. Denn dann wird von den beyden Reſultaten das eine $x = a + \sqrt{b}$, das andere $x = a - \sqrt{b}$, welche gleich bequem das Problem auflöſen.

10. Wenn die Eigenſchaften irgend eines Syſtems von Quantitäten durch Gleichungen oder Formeln ausgedrückt werden, die auf dieſen eben berührten Urzuſtand zurückgeführt ſind, d. h. ſo, daſs alle darin durch Zeichen angezeigte Verrichtungen wirklich ausgeführt werden können; ſo ſage ich, daſs dieſe Formeln unmittelbar anwendbar auf das Syſtem ſind, und nenne ſie, in Hinſicht auf das Syſtem, klare Formeln. Im Gegentheil nenne ich verwickelte Formeln diejenigen, die nicht auf das Syſtem angewandt werden können, wenn ſie nicht vorher eine Umformung erlitten haben.

So ſind im vorigen Beyſpiel, $x - a = \sqrt{b}$, $x = a + \sqrt{b}$, $x = a - \sqrt{b}$, klare Formeln, weil in dieſen Gleichungen keine Verrichtung angezeigt iſt, die nicht wirklich ausgeführt werden könne, hingegen die Gleichung $x - a = -\sqrt{b}$ iſt bloſs verwickelt, weil man ſie nicht bedeutend machen kann, ohne ſie vorher umgeformt zu haben; indem man z. B. entweder a verſetzt, was $x = a - \sqrt{b}$ giebt, oder indem man die Zeichen aller Ausdrücke verändert, woraus $a - x = \sqrt{b}$ entſteht; Formeln, die beyde klar ſind.

11. Unter der Geschlechtsbenennung Gröſse werde ich eben ſo wohl wahre Quantitäten, als algebraiſche Formen, die ich Werthe genannt habe, begreifen. Bisweilen auch um mich ſo viel als möglich den gewöhnlichſten Ausdrücken zu nähern, werde ich Quantität für Werth brauchen, und ſo wechſelsweiſe, aber bloſs, wenn daraus kein zweydeutiges Reſultat entſtehen kann.

12. Man hat an dem oben angeführten Beyſpiel geſehen, daſs man verwickelte Formeln nicht als unbrauchbar verwerfen muſs; es iſt ſogar gerade der Gebrauch dieſer Formeln, der den Charakter der Analyſis ausmacht, und der ihr einen ſo groſsen Vortheil vor der Syntheſis giebt. Dieſe iſt durch die Natur ihres Verfahrens eingeſchränkt; ſie kann niemals ihren Gegenſtand aus den Augen verlieren; dieſer Gegenſtand muſs ſich ſtets dem Geiſte rein und wirklich zeigen, ſo wie alle Annäherungen und Zuſammenſetzungen, die man damit vornimmt. Sie kann alſo keine verwickelte Formeln gebrauchen, nicht Schlüſſe auf ungereimten Quantitäten, auf unausführbaren Verrichtungen machen; ſie kann wohl Zeichen gebrauchen, um der Einbildungskraft und dem Gedächtniſſe zu Hülfe zu kommen; aber dieſe Zeichen ſind nie für ſie mehr, als bloſse Abkürzungen.

Die Analyſis im Gegentheil hat nicht nur alle Hülfsmittel der Syntheſis, ſondern ſie läſst auch in ihren Zuſammenſtellungen Gegenſtände zu, die nicht exiſtiren; ſie ſtellt ſie durch Sinnbilder dar, eben ſo gut wie die wirklichen; ſie miſcht Weſen der Wirklichkeit und Geſchöpfe der Vernunft, und bringt durch methodiſche

Umformungen endlich die letzten, nachdem sie sich ihrer zur Hülfe bedient hat, aus der Rechnung. Dann verschwindet das Unverständliche aus den Formeln, und es bleibt nur das nach, was eine feine Synthesis ohne Zweifel auch hätte entdecken können; aber man hat diess Resultat auf einem kurzen und leichteren Wege, beynahe durch blossen Mechanismus erhalten, da im Gegentheil, zu jeder andern Art dahin zu gelangen, grosser Kraftaufwand nöthig gewesen wäre. Diess ist der Vorzug der Analysis vor der Synthesis, d. h. der Neueren vor den Alten.

Die Alten brauchten die Zeichen, welche die Neueren auf allgemeinere Art in der Analysis anwenden, nicht einmal als Abkürzungen in ihrer Synthesis. Aber diess beweist nicht, dass der Gebrauch der Zeichen ausschliesslich für die Analysis gehöre; diess beweist bloss, dass die Alten, um die bewundernswürdigen Entdeckungen zu machen, die wir ihnen verdanken, nicht einmal die Hülfe einer so weit als möglich getriebenen Synthesis hatten. Doch gebrauchten sie die Lehre von den Verhältnissen sehr geschickt, wo man eine Art von Mechanismus anwendet, der mit dem analytischen viele Aehnlichkeit hat, aber sie gebrauchten sie nur, um ausführbare Verrichtungen anzuzeigen. Die Neueren haben den Weg eröffnet, und hierdurch wird der Charakter der Analysis bestimmt und ihr überraschendes Resultat hervorgebracht.

13. Jeder andere Unterschied zwischen Analysis und Synthesis ist nur scheinbar. Die Synthesis, sagt man, ist die Kunst, sich stufenweise von den einfach-

ſten Wahrheiten durch ihre ſucceſſive Annäherung und Zuſammenſtellung zu den zuſammengeſetzteſten zu erheben; wenn die Analyſis die Kunſt iſt, eine verwickelte Wahrheit in ihre erſten Beſtandtheile aufzulöſen, d. h. die Kunſt, allmählich ſich nähernd zu bewähren, ob eine Wahrheit oder ein entfernter Satz, den man als wahr annimmt, mit dieſen Grundſätzen oder Axiomen übereinſtimmt und eine nothwendige Folge aus ihnen iſt. Aber es iſt klar, daſs die Schlüſſe, die man in beyden Fällen machen muſs, dieſelben ſind, nur in einer anderen Ordnung. Dieſs iſt alſo kein weſentlicher Unterſchied der beyden Methoden, und man ſieht ſo nicht ein, was der einen einen ſo groſsen Vortheil vor der andern giebt.

Die algebraiſchen Charaktere oder Zeichen, welche der Analyſis ſo geläufig ſind, während die Syntheſis faſt immer die gewöhnliche Sprache braucht, bilden durch ſich ſelbſt, wie man geſehen hat, keinen bedeutenderen Unterſchied; denn in der Syntheſis braucht man dieſe Zeichen oft als bloſse Abkürzungen, und macht deswegen doch aus ihr keine Analyſis. Eben ſo wird eine analytiſche Formel, in gewöhnliche Sprache überſetzt, deswegen kein ſynthetiſcher Satz. Es iſt gewiſs, daſs man einen ausgedehnten Gebrauch der algebraiſchen Zeichen machen kann, ohne ſich je aus der Syntheſis zu entfernen, und daſs es keine analytiſche Unterſuchung giebt, zu der man nicht gelangen könne, ohne ein einziges dieſer Zeichen zu gebrauchen; man braucht nur dieſen Zeichen eine hinreichende Anzahl Worte unterzuſchieben.

Es ist wahr, dafs die Synthesis von Axiomen ausgeht und sich stufenweise zu verwickelteren Wahrheiten erhebt. Aber diefs Verfahren ist ihr nicht eigen, diefs ist das einzig mögliche in allen Fällen, und schon bey wenigem Nachdenken wird man sehen, dafs die Analysis kein anderes beobachtet. Sie behandelt freylich unbekannte Gröfsen als gegebene, aber diese unbekannten Gröfsen haben bekannte Eigenschaften, woran sich einzig die Analysis hält; diese übersetzt sie, und aus diesen, indem sie immer, wie die Synthesis, vom Bekannten zum Unbekannten geht, entwickelt sie das, was sie entdecken will. Die Kunst, von dem, was man nicht weifs, zu dem, was man weifs, zu schreiten, ist eine Verrichtung, die dem menschlichen Verstande versagt ist.

Von jeher haben die Menschen ihre intellektuellen Fähigkeiten durch Symbole zu unterstützen gesucht, um sich so eine Art von künstlichem Gedächtnifs zu verschaffen, ihre Einbildungskraft durch die Näherung der Gegenstände, von denen sie getroffen war, zu erweitern, und die Gesetze der Schlufsfolge auf eine Art von Mechanismus zu bringen. Diese Grundidee oder dieser Instinkt ist die Quelle der gröfsten Entdeckungen aller Art gewesen; vorzüglich die Quelle der genauen Wissenschaften; z. B. der Rechenkunst, d. h. der Kunst durch materielle Verrichtungen an einem System symbolischer Charaktere theilweise die Verrichtungen des Geistes zu ersetzen; der Algebra, die nur eine Art unbestimmter Rechenkunst, d. h. die Kunst ist, der Zahlen-Rechenkunst die Verrichtungen anzuzeigen, die sie ausführen soll. Die eine wie die

andere ſind Werkzeuge, deren ſich die Analyſis bedient; aber dieſe Werkzeuge gehören eben ſo wohl der Syntheſis; bloſs der verſchiedene Gebrauch, den die beyden Methoden von ihnen machen, beſtimmt ſie. Durch ſie drückt die Syntheſis alle möglichen Verhältniſſe des Daſeyns unter Quantitäten aus; aber vermittelſt ihrer iſt die Analyſis dahin gelangt, nicht bloſs alle Verhältniſſe des Daſeyns auszudrücken, ſondern auch alle unvereinbare Verhältniſſe: dieſs, indem ſie die erſten durch die Anzeigung möglicher Verrichtungen darſtellt; die andern durch Anzeigung unausführbarer Verrichtungen.

Man bilde eine ununterbrochene Kette von Sätzen, vom Axiom bis auf eine entfernte Wahrheit, ſo wird es leicht ſeyn, auf mehrere Arten die Ordnung dieſer Sätze zu verkehren, ohne daſs die Reihe der Schlüſſe etwas von ihrer Evidenz verliere; denn die einzigen hier zu erfüllenden Bedingungen ſind,

1) daſs man in jedem dieſer Sätze deutlich die Gleichheit der beyden verglichenen Gegenſtände ſehe;
2) daſs dieſe beyden Gegenſtände wiederholt ſeyen, der eine im vorhergehenden, der andere im folgenden Satze.

Nun iſt es deutlich, daſs es viele Arten geben kann, dieſe Bedingungen zu erfüllen, und daſs folglich die Veränderung der Ordnung in der Reihe dieſer Sätze nicht die Veränderung der Methode ausmacht.

Was wirklich die Veränderung ausmacht, d. h. den Unterſchied der Analyſis von der Syntheſis, iſt dieſs, daſs die letztere nie zu dem geſuchten Reſultat

gelangt, wenn ſie nicht vorher in der That die Kette von Sätzen, von der wir eben ſprachen, aufſtellt; die Analyſis im Gegentheil aber gleich durch einen ihr eignen kurzen Weg dahin kommt, indem ſie unterwegs eine Kette, nicht von wirklichen Gegenſtänden, wie die vorige, ſondern von Hieroglyphen bildet, die ſehr oft nur bloſse Vernunftweſen bedeuten. Hat ſie die geſuchte Wahrheit einmal gefaſst, und der Syntheſis gezeigt, ſo iſt das Amt der letzteren, ihre Kette von wirklichen Gegenſtänden aufzuſtellen: die groſse Schwierigkeit iſt gehoben; man weiſs den Punkt, wo man ankommen ſoll; der Punkt, wo man ausgeht, iſt bekannt, und man braucht nur den kürzeſten und bequemſten Weg zu bezeichnen, um den Zwiſchenraum auszufüllen.

Iſt dieſer Weg einmal gegründet, ſo iſt er gleich ſicher und gleich lichtvoll, man mag ihn in welcher Richtung man will durchlaufen; es iſt immer Syntheſis, ſo wie der hieroglyphiſche Weg immer Analyſis bleibt, ſo lange die durch dieſe Bilder bezeichneten Gegenſtände nicht wirkliche und dem Geiſte faſsliche geworden ſind. So wie ſie das werden, ſind die Hieroglyphen nichts mehr als eine abgekürzte Schrift, die kein weſentlich verſchiedenes Merkmahl von der Schrift der Syntheſis beybehält; die eine wird zur andern durch eine bloſse Ueberſetzung.

Wäre eine abgekürzte Schrift genug, um Analyſis zu begründen, ſo hätte die Stenographie dieſen Charakter; ſie würde Analyſis ſeyn, auf den gewöhnlichen Gebrauch der Geſellſchaft angewandt. Aber ſie erreicht dieſen Zweck nicht; ihre Vortheile ſind,

Worte mit der Schnelle des Organs, das sie ausspricht, aufzufassen, von ihnen ein Bild zu entwerfen, das sie unter einen Gesichtspunkt körperlich nähert und vereinigt, und endlich eine Wirkung hervorzubringen, die sich sehr der der algebraischen Zeichen nähert, die wie bloſse Abkürzungen gebraucht werden. Aber um die Stenographie zu einer analytischen Wissenschaft zu erheben, müſste man ihr einen Mechanismns anpassen können, der geschickt wäre, auf alle möglichen Arten die Rede, die sie darstellt, umzuformen, ohne ihren Sinn zu verändern, die Theile dieser Rede zu versetzen, ohne ihre Beziehung oder doch wenigstens die Resultate ihrer Zusammenstellung zu ändern; dann könnten die Regeln dieses Mechanismus eine Art Analysis bilden, die auf Gegenstände jeder Art anwendbar wäre.

14. Die glücklichen Fortschritte der Analysis, die stete Uebereinstimmung ihrer Resultate mit dem, was man durch die Synthesis erhalten konnte, und das Siegel der Gewiſsheit, das allen Entdeckungen der erstern nach der Reihe von der letztern aufgedrückt ward, haben die Sicherheit ihres Verfahrens auſser allen Zweifel gesetzt. Aber bey den ersten Versuchen dieser Erfindungsmethode muſste man sehr vorsichtig seyn, und durfte ihre Entdeckungen nicht an's Licht bringen, wenn sie nicht vorher durch die Probe der Synthesis gegangen waren. Deswegen, glaube ich, hielt Newton seine erhabenen Arbeiten nicht werth vor den Augen der gelehrten Welt zu erscheinen, ehe er ihnen die synthetische Form gegeben und sie von den symbolischen Ausdrücken befreyt hatte, die ab-

surde Quantitäten oder unausführbare Verrichtungen angezeigt hätten; Hülfsmittel, die dem Suchenden unendlich nützlich sind, die aber doch den nicht ganz befriedigen, der nicht das kleinste Wölkchen leiden kann. Er wollte in einem Werke, daſs, wenn man die Kette der hieroglyphischen Wahrheiten aufgestellt hätte, man auch die Kette der erkennbaren Wahrheiten wieder anknüpfte. Durch glücklichen Erfolg ist man dreister geworden, und den Resultaten der Analysis traut man jetzt eben so viel, als dem, was man durch die strengste Synthesis erlangt.

Wenn die Analysis nur die Kunst wäre, der Kette der Schlüsse in einer Richtung zu folgen, die der Richtung, auf die die Synthesis zeigt, entgegengesetzt wäre, so könnten die Neueren sich nicht ihre Erfindung zuschreiben; denn dieser Gang war den Alten schon bekannt, von ihnen gebraucht und nach den Regeln erklärt. Sie schrieben Plato'n die Entdeckung zu, und die *reductio ad absurdum*, die sie oft in ihren Beweisen gebrauchten, ward als eine Anwendung dieser Methode angesehen. Newton's *Principia* enthalten eine Menge Untersuchungen, die auf demselben Wege angestellt worden sind. Und doch führt man mit Grund dieſs Werk als ein Meisterstück der Synthesis an, weil es in der That ihren wahren Charakter hat; weil die algebraischen Zeichen darin nur als Abkürzungen gebraucht sind, und man nirgends darin auf isolirte negative oder eingebildete Quantitäten stöſst *). Nun ist es der Gebrauch dieser

*) In dem ganzen Werke der *Principia* habe ich keine eingebildete Quantität bemerkt; man trifft auf 4 bis 5 von nega-

algebraiſchen Formen, der wahrhaftig die analytiſche Methode ausmacht; zwiſchen den Symbolen, die wirkliche Gegenſtände darſtellen, und denen, die bloſse Weſen der Vernunft ausdrücken, liegt der Uebergang der Syntheſis zur Analyſis, liegt die zwiſchen ihnen gezogene Demarkationslinie. Hier wechſelt man den Führer, hier verliert die Einbildungskraft ihren Gegenſtand aus den Augen, um ihn nicht eher wieder zu finden, als am Ende der Kette, wo die beyden Methoden von neuem ſich vereinigen und in ihren Reſultaten zuſammentreffen.

15. Die Syntheſis wird nicht ausſchlieſslich auf Mathematik angewandt. Sie iſt überhaupt die Kunſt mit Richtigkeit zu ſchlieſsen, was auch immer der Gegenſtand der Schluſsfolge ſey. Sie iſt nicht von der Dialektik unterſchieden; die eine wie die andere iſt die Methode, die Form eines Schluſſes zu verändern, ohne den Schluſs ſelbſt zu ändern; man mag nun ſeine Theile umſetzen, oder einem deutlichen Ausdruck dieſes Schluſſes einen andern unterſchieben, der eben ſo viel ſagt. Dieſe Reihe von Umformungen, ſtrenge auf die Schluſsfolge im Allgemeinen angewandt, mag ſie durch Zeichen oder durch gewöhnliche Sprache ausgedrückt ſeyn, nennt man Syntheſis oder Dialektik. Die Analyſis allgemein genommen iſt dadurch unterſchieden, daſs die Reihe der Umformungen mit Theilen der Unterſuchung vorgenommen wird, die allein genommen verſtümmelt und nie ver-

tiver Form die zur Vereinfachung der Rechnung genommen ſind.

A. d. V.

ständlich sind, aber wenn sie wie die andern dem Mechanismus der Schlussfolge unterworfen werden, durch eine neue Reihe von Umformungen zu deutlichen und genauen Resultaten, wie die der Synthesis, führen können. Ich glaube nicht, dass es unmöglich sey, diesen analytischen Mechanismus auf Gegenstände anzuwenden, die man als ganz fremdartig mit denen von der Mathematik behandelten betrachtet, aber diese Anwendung muss um so viel schwerer werden, als die Verhältnisse zwischen diesen Gegenständen weniger einer bestimmten Schätzung und einer genauen Stufenleiter der Vergleichung fähig sind. Da nun der gröſste Theil der Fragen, die nicht allein im Verkehr der Gesellschaft abgehandelt werden, sondern auch in wissenschaftlichen Werken, die mehr für die Schärfe der Schlussfolge gemacht zu seyn scheinen (z. B. in der Staatshaushaltung), zum Theil mit der Moral mit Muthmassungen unbestimmter Thatsachen und sehr vervielfältigten Zusätzen verknüpft sind; so giebt es wenige Umstände, wo die eigentliche analytische Wissenschaft ihre Anwendung finde. Doch zweifle ich gar nicht, dass man nicht dahin gelange, ihr Gebiet weit auszudehnen, wenn man die Regeln des Mechanismus aufsucht, den man auf gemeine Erörterungen und vorzüglich auf die stenographische Schrift anwenden könne.

16. Diese Abschweifung, wenn vielleicht auch zu weit ausgedehnt, ist doch dem Gegenstande, den ich abhandle, nicht fremd. Denn man muss sich gerade bemühen, den Gebrauch zu rechtfertigen, den die Analysis von Quantitäten macht, die in sich selbst

abſürd ſind, und darthun, wie dieſe abſurden Quantitäten andere anzeigen, die wirklich ſind, und wie die Zeichen, die auf ſie wirken, die verſchiedenen Verhältniſſe und die jedesmaligen Lagen erkennen laſſen, die ſie haben müſſen. Dieſs Werk iſt ein Verſuch in Unterſuchungen dieſer Art.

17. Im Allgemeinen macht der Gebrauch der ſogenannten negativen Quantitäten allein genommen, daſs eine angezeigte Verrichtung nicht ausführbar iſt, d. h. der Quantitäten, die von Null abgezogen werden ſollen oder kleiner als Null ſind. Wir haben alſo, eigentlich zu ſprechen, eine Prüfung der Natur der Gröſsen anzuſtellen, die negativ oder poſitiv genannt werden.

18. Wir wollen ein Syſtem von veränderlichen Quantitäten annehmen, einerley, ob aus der Geometrie gezogen oder nicht, und dieſs Syſtem in zwey verſchiedenen Zuſtänden betrachten; in einem, den ich als Maaſsſtab zur Vergleichung annehme und Urſyſtem nenne; und in einem andern, den ich auf den erſten beziehe und den ich umgeformtes oder correlatives Syſtem nenne.

19. Nun wollen wir jede der Quantitäten, die das Urſyſtem ausmachen, als die Gränze der ihr im umgeformten Syſtem entſprechenden betrachten, d. h. als ihren erſten Werth, wenn das Syſtem von ſeinem Urzuſtand zu ſeinem umgeformten überzugehen anfängt, oder, wenn man will, als ihren letzten Werth, wenn man annimmt, daſs das umgeformte Syſtem auf ſeinen Urzuſtand zurückkommt. Hier iſt es deutlich, daſs, wenn man zwey der Quantitäten des umgeformten Syſtems unter einander vergleicht, um ihr

Verhältnifs zu kennen, diefs Verhältnifs, als Gränze oder als erfter und letzter Werth, das Verhältnifs der Gränzen derfelben Quantitäten haben werde, und gerade diefs Verhältnifs der Gränzen oder der Gränze des Verhältniffes zweyer Quantitäten des umgeformten Syftems, nennt man erftes oder letztes Verhältnifs derfelben Quantitäten.

Ift der Zuftand der Umformung des Syftems noch nicht beftimmt, und nimmt man den Unterfchied jeder Quantität von ihrer Gränze, fo find diefe Unterfchiede das, was man unter dem Namen der unendlich kleinen bezeichnet; d. h. man nennt unendlich klein den Unterfchied einer unbeftimmten Quantität von ihrer Gränze, weil man wirklich zu gleicher Zeit diefe Unterfchiede fo klein machen kann, als man will, indem man das umgeformte Syftem, fo viel man will, dem Urfyftem nähern und zugleich alle diefe Quantitäten verfchwinden laffen kann, indem man die Annäherung der beyden Syfteme fo weit treibt, bis fie in einander fallen.

Man fieht alfo, dafs die Gränze von jeder diefer Quantitäten, die unendlich klein genannt werden, Null ift. So kann man fie alfo beftimmen, indem man fagt, man nennt unendlich klein jede Quantität, die Null zur Gränze hat. Diefe Definition ift ftreng genau. Eine unendlich kleine Quantität ift darum nicht keine Quantität, fondern eine Quantität, deren Gränze Null ift, und diefer einfache Begriff verbannt alle Schwierigkeiten aus den Anfangsgründen der Analyfis des Unendlichen. Wir haben oben gefagt, dafs das letzte Verhältnifs zweyer veränderlichen Quantitäten

nichts

nichts anders ist, als das Verhältniss ihrer Gränzen. Diess sieht man vollkommen ein; so lange diese Gränzen nicht Null sind, d. h. so lange diese verglichenen veränderlichen Quantitäten nicht die sind, die man unendlich klein nennt. In diesem letzten Fall, da das Verhältniss der Gränzen auf $\frac{0}{0}$ zurückkommt, nimmt das letzte Verhältniss dieser Quantitäten, wie man sieht, eine unbestimmte Gestalt an. Welches ist nun der Werth dieser Unbestimmten? Hier liegt der Grund der Schwierigkeit der Analysis des Unendlichen. Aber diese Schwierigkeit hört sogleich auf, wenn man betrachtet, dass diesem letzten Verhältniss, da es nichts anders ist, als das Ziel, dem sich mehr und mehr das Verhältniss dieser Quantitäten selbst nähert, so wie das umgeformte System dem Punkte, wo es in das Ursystem fällt, näher kommt, dass diesem Verhältnisse selbst sein Werth durch das Gesetz der Stetigkeit bestimmt ist, und dass es so aus dem Zustande der Unbestimmtheit kommt.

20. Wenn in einer streng genauen Gleichung unendlich kleine Quantitäten sich mit andern vermischt finden, die es nicht sind, und man diese Gleichung auf 2 Ausdrücke bringen kann, deren Verhältniss selbst eine unendlich kleine Quantität ist, so beweist die Methode der Unbestimmten, dass jeder dieser Ausdrücke für sich nothwendig $= 0$ ist. Denn wenn man annimmt, dass $X + Y = 0$ diese genaue Gleichung, und dass $\frac{Y}{X}$ eine unendlich kleine Quantität sey, so behaupte ich, dass nothwendig X und Y

jedes für ſich genommen $=0$ ſeyn müſſen. Wir wollen annehmen, X ſey nicht o, ſo theile ich alles durch X und erhalte $1+\frac{Y}{X}=0$; aber nach der Hypotheſe iſt $\frac{Y}{X}$ eine unendlich kleine Gröſse; d. h. indem man das umgeformte Syſtem dem Urſyſteme nähert, kann man $\frac{Y}{X}$ ſo klein machen als man will; alſo wenn X nicht o iſt, ſo kann man machen, daſs 1 ſo wenig, als man will, von o unterſchieden ſey, was abſurd iſt. Alſo hat man wirklich $X=0$, eine Gleichung, die, von der nach der Hypotheſe eben ſo genauen Gleichung $X+Y=0$ abgezogen, $Y=0$ giebt. Alſo ſind X und Y jede allein $=0$, und da Y auch nach der Hypotheſe die Vereinigung aller Ausdrücke iſt, deren Verhältniſs zu X als unendlich klein angenommen iſt, ſo folgt, daſs man alle dieſe Ausdrücke übergehen kann, um bloſs die Gleichung $X=0$ ſtehen zu laſſen. Dieſs iſt der Grundſatz der Analyſis des Unendlichen, die, wie man ſieht, nur eine Anwendung der Methode der Unbeſtimmten iſt.

Da ich den Veränderungen des umgeformten Syſtems folgen wollte, von dem Augenblick, wo es ſich von dem Urſyſteme losreiſst, muſste ich auch einen Blick auf den Zuſtand der Unbeſtimmtheit werfen, in welchem es bleibt, bis ſeine erſten Gränzen von dem Rechner verändert ſind; d. h. bis er ihm irgend einen andern beſtimmten Zuſtand angewieſen hat. Zur gehörigen Entwickelung der vorigen Be-

griffe würde freylich mehr Raum gehören. In einem andern Werke, das unter dem Titel:

Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal,

gedruckt ist, habe ich es zu thun versucht, das man also als einen Theil dieses Werkes ansehen kann. Ich nehme jetzt den Faden bey (18) wieder auf.

21. Statt, wie ich eben gethan habe, den Unterschied jeder der Quantitäten des umgeformten Systems von seiner Gränze zu betrachten, betrachte ich jetzt die Differenz von irgend zwey Quantitäten des umgeformten Systems von einander, und vergleiche sie mit der Differenz der diesen Quantitäten entsprechenden Gränzen. Diess angenommen:

Wird der Unterschied von irgend zwey Quantitäten des umgeformten Systems in direktem Sinn oder bloss direkt genannt werden, wenn, indem man diese beyden Quantitäten mit den ihnen im Ursystem entsprechenden vergleicht, die, die im umgeformten System die grösste ist, während der ganzen Veränderung derjenigen, die im Ursystem die grösste war, entspricht, und eben so die kleinste des einen, der kleinsten des andern, ohne dass eine von beyden aufgehört hätte endlich zu seyn, d. h. nicht durch o und $\frac{1}{0}$, oder ∞ gegangen ist.

Wenn hingegen die, die im Ursystem die grösste war, im umgeformten die kleinste geworden ist, und umgekehrt, während dass diese beyden veränderlichen Quantitäten beyde beständig endlich geblieben, d. h. weder durch o, noch durch ∞ gegangen sind, so

wird ihr Unterschied in inversem Sinn oder schlechtweg invers genannt werden.

In Hinsicht der Quantitäten selbst, deren Unterschied in direktem Sinne angenommen wird, sagt man, dass sie gegenseitig in direkter Ordnung geblieben sind; und wird dieser Unterschied invers, oder findet sich in inversem Sinne, so sagt man, dass sie zur inversen Ordnung übergegangen sind. So nennt man also direkt die Unterschiede der Grössen, die beständig in Rücksicht auf einander, während der Veränderung des Systemes, in direkter Ordnung bleiben, und invers die Unterschiede derer, die zur inversen Ordnung, in Rücksicht auf einander, durch eben diese Veränderung übergehen, doch ohne dass weder die eine, noch die andere aufgehört hätte endlich zu seyn, d. h. ohne dass sie durch 0 oder ∞ gegangen sey.

Aber man muss nicht vergessen, dass, nach den vorher gegebenen Begriffen, in diesen Definitionen nur von wahren Quantitäten die Rede ist, und nicht von dem, was ich Werth genannt habe. So können die Differenzen, die hier vorkommen, nur von dem Ueberschuss derjenigen Grösse verstanden werden, die an sich die grössere ist über diejenige, die an sich die kleinere ist, wobey man ganz von den Zeiten abstrahirt, und folglich sind diese Unterschiede selbst wahre Quantitäten.

22. Man nehme z. B. einen Triangel ABC, auf dessen Grundlinie $\overline{BC}$ aus dem entgegengesetzten Winkel A ein Perpendikel $\overline{AD}$ gesenkt sey, von dem ich annehme, dass er zwischen B und C fällt; wir wol-

len die Grundlinie $\overline{BC}$ mit ihren beyden Abſchnitten $\overline{BD}$ und $\overline{CD}$ betrachten, und annehmen, daſs der Punkt C ſich gegen B bewegt, bis er durch den Punkt D gegangen iſt. So iſt die Grundlinie und der Abſchnitt $\overline{CD}$ alſo veränderlich, während der andere Abſchnitt $\overline{BD}$ beſtändig iſt.

Iſt dieſs angenommen, ſo wollen wir als Maaſsſtab zur Vergleichung die Urfigur nehmen, die aus dem Triangel ABC und dem Perpendikel $\overline{AD}$ beſteht, und als umgeformtes Syſtem dieſelbe Figur, nachdem der Punkt C ſich dem Punkte D genähert hat, ohne doch bis zu ihm gelangt zu ſeyn. Dann iſt es deutlich, daſs man hier im Urſyſteme wie im umgeformten beſtändig $\overline{BC} > \overline{BD}$ haben wird, und noch mehr, daſs dieſe Quantitäten während der ganzen Veränderung endlich geblieben ſind, alſo ſind es von denen, die ich in direkter Ordnung genannt habe, und ihr Unterſchied $\overline{CD}$ iſt in direkter Richtung oder direkt.

Nachher wollen wir als umgeformtes Syſtem dieſelbe Figur nehmen, wenn der Punkt C ſchon jenſeits des Punktes D gegangen iſt, indem uns das Urſyſtem immer als Maaſsſtab zur Vergleichung dient. Es iſt deutlich, daſs man dann $\overline{BD} > \overline{BC}$ haben wird. Alſo nach den vorher gegebenen Begriffen ſind dieſe beyden Quantitäten zur inverſen Ordnung übergegangen, und ihr Unterſchied $\overline{CD}$ iſt invers oder in inverſer Richtung, d. h. in verkehrter Richtung von dem, was ſie in der Urfigur waren, die noch immer als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen wird.

Wenn man alſo von zwey Quantitäten ſagt, daſs ſie in direkter oder inverſer Ordnung ſind, oder von einer Quantität, daſs ſie direkt oder invers iſt; ſo vergleicht man eben dadurch, zum wenigſten ſtillſchweigend, das Syſtem, zu dem dieſe Quantitäten gehören, mit einem andern Syſtem, das als Maaſsſtab zur Vergleichung, oder als Urſyſtem angenommen iſt, ohne daſs es nöthig ſey, dieſs ausdrücklich zu ſagen.

23. Den erſten Begriffen gemäſs, die ſchon (2 u. f.) gegeben ſind, nenne ich correlative Syſteme alle die, die man auf daſſelbe Urſyſtem beziehen kann, d. h. die man als verſchiedene Zuſtände eines und deſſelben veränderlichen Syſtems anſehen darf, das ſich durch unmerkbare Stufen umformt.

Zwey Syſteme, um correlativ zu ſeyn, brauchen nicht nothwendig faktiſch unter einander verbunden zu ſeyn, d. h. nicht wirklich die verſchiedenen Umformungen eines Urſyſtems zu ſeyn: es iſt genug, wenn ſie nur als ſolche betrachtet werden oder eins auf das andere durch eine Veränderung zurückgeführt werden können, die man ſich, als durch unmerkbare Stufen wirkend, vorſtellen muſs. Die Quantitäten, die ſich in den zwey correlativen Syſtemen entſprechen, werden eben ſo correlative Quantitäten genannt.

Sind zwey correlative Syſteme, ſo daſs man genau auf ſie dieſelbe Betrachtung anwenden kann, oder eine Reihe von Betrachtungen, die durchaus ähnlich ſind, ſo ſage ich in Hinſicht auf dieſelbe Reihe von Betrachtungen, daſs ſie in direkter Correlation ſtehen, oder direkt correlativ ſind. Dar-

aus folgt augenſcheinlich, wenn das Reſultat dieſer Betrachtungen für das eine Syſtem eine gewiſſe Formel iſt, die man unmittelbar darauf anwenden kann, daſs dieſelbe Formel auch auf das andere Syſtem unmittelbar anwendbar ſeyn wird, d. h. daſs, um auf dieſes die für das erſte gefundene Formel anzuwenden, man keine andere Veränderung zu machen habe, als ſtatt der darin befindlichen Werthe die entſprechenden Werthe des andern Syſtems zu ſetzen, ohne irgend eine Veränderung der Zeichen in der Formel, was dem ſchon gegebenen Begriffe entſpricht (4). Aber wenn die Betrachtungen, die man über die beyden verglichenen Syſteme machen muſs, nicht mehr buchſtäblich dieſelben ſind, ſo ſage ich, daſs ſie unter ſich in indirekter eingebildeter oder complexer Correlation ſind, nach den mehr oder minder ſichtbaren Modifikationen, die man mit den Zeichen der Formeln, welche die Eigenſchaften des Urſyſtems ausdrücken, vornehmen muſs, um ſie auf das umgeformte Syſtem anwendbar zu machen.

Z. B. in dem ſchon betrachteten Urſyſtem (*Fig.* 1.) *ABCD* kann ich dieſe Betrachtung anſtellen. Der Triangel *ABD* giebt

$$\overline{AB}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{AD}^2$$

und der Triangel *ACD*

$$\overline{AC}^2 = \overline{CD}^2 + \overline{AD}^2$$

Ziehet man dieſe Gleichung von der erſten ab, ſo bleibt

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$$

Noch mehr, man hat

$$\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$$

ſetzt man dieſen Werth von $\overline{BD}$ in die vorige Gleichung, ſo erhält man

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{CD}$$

Es iſt deutlich, daſs dieſe Betrachtung ganz und wörtlich auf das umgeformte Syſtem anwendbar iſt, ſo lange der Punkt D zwiſchen B und C liegt, alſo iſt die vorhergehende Formel unmittelbar auf alle Fälle anwendbar, ſo lange CD in direkter Richtung iſt.

Aber iſt C durch den Punkt D gegangen, ſo findet bloſs der erſte Theil der Betrachtung (bis an die Worte „noch mehr") ſtatt. Der zweyte kann im Gegentheil nicht auf den neuen Fall angewandt werden, weil man nicht mehr wie vorher $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$ hat; ſondern im Gegentheil $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC}$, d. h. weil $\overline{CD}$ invers geworden iſt. Auch wird die Endgleichung für dieſen Fall ſeyn

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{CD},$$

die von der für den erſten Fall gefundenen durch das Zeichen verſchieden iſt, das den letzten Ausdruck afficirt, indem es — für den erſten Fall, und + für den zweyten iſt.

24. Wir wollen ſehen, was im Allgemeinen ſtatt findet, ſowohl wenn in den Formeln, die die Eigenſchaften des Syſtems ausdrücken, indirekte Quantitäten kommen, als auch wenn die Veränderung des Syſtems die Einführung einer, oder zweyer inverſer Quantitäten erfordert, damit ſie ihm immer unmittelbar anwendbar ſeyen.

M, N, ſeyen irgend zwey Quantitäten des Urſyſtems; m, n, die entſprechenden Quantitäten des zwey-

ten Syſtems. Dieſs angenommen, ſo werden nach der Definition, ſo lange die beyden Syſteme direkt correlativ bleiben, m und n genau im zweyten Syſtem dieſelbe Rolle ſpielen, wie die ihnen entſprechenden M, N, im erſten.

Noch mehr, wenn man z. B. $M > N$ annimmt und auch $m > n$ hat, ſo werden die letztern Quantitäten in direkter Ordnung ſeyn und ihr Unterſchied $m - n$ in direkter Richtung, d. h. wenn man den Unterſchied der beyden erſten M, N, $= P$ nennt, und p den Unterſchied der beyden letzten m, n, ſo wird dieſe Quantität p eine direkte Quantität ſeyn.

Nun weil $M > N$ werden wir haben

$$P = M - N, \text{ und } p = m - n$$

$$\text{oder } M = N + P, \text{ und } m = n + p$$

Wir wollen in die Formeln, von denen wir eben ſprachen, dieſe jedesmaligen Werthe von M und m ſetzen, ſo iſt es deutlich, daſs dieſe Formeln, die vor der Umformung ähnlich waren, es auch hernach ſeyn werden, weil anſtatt der ſich entſprechenden Quantitäten M, m, die dieſelbe Rolle darin ſpielten, man darin die Werthe $N + P$, $n + p$, ſubſtituirt hat, die noch dieſelben Formen haben.

Alſo, ſo lange nur in der Rechnung direkte Quantitäten vorkommen, werden die ſich entſprechenden Formeln im Urſyſtem und im umgeformten unter ſich ähnlich bleiben, weil wirklich die neuen Betrachtungen, die man zu den erſten hinzugefügt hat, d. h. zu denen, durch die die Formeln gefunden wurden, noch genau dieſelben von beyden Seiten geweſen ſind.

Jetzt wollen wir ſehen, was eintritt, wenn in die Formel eine inverſe Quantität gebracht werden muſs.

Angenommen, daſs wir noch immer $M > N$, aber im Gegentheil $n > m$ haben, d. h. daſs dieſe letzten in Hinſicht auf die erſten in inverſer Ordnung ſind, ſo wird ihr Unterſchied nicht mehr wie vorher $m - n$, ſondern $n - m$ ſeyn, und man wird für dieſen Fall auf einer Seite $P = M - N$ und auf der andern $p = n - m$ oder $M = N + P$, und $m = n - p$ haben.

Wir wollen dieſe Werthe von M und m in die ſich entſprechenden Formeln ſetzen, die bis dahin für beyde Syſteme ähnlich waren, ſo werden ſie aufhören es nach dieſer Subſtitution zu ſeyn: denn in die eine hat man $N + P$ ſtatt M geſetzt, in die andere $n - p$ ſtatt m; es wird alſo zwiſchen den neuen Formeln der Unterſchied ſeyn, daſs die Werthe der Quantitäten P und p von verſchiedenen Zeichen afficirt ſind. Um alſo von den Formeln des Urſyſtems zu denen des umgeformten Syſtems überzugehen, iſt es genug, wie vorher, in den erſten für die darin befindlichen abſoluten Werthe, die abſoluten ihnen entſprechenden Werthe des andern Syſtems zu ſetzen, und auſserdem noch das Zeichen der Quantität p zu ändern, die invers geworden iſt.

Da man nun dieſelbe Betrachtung auf alle andere Quantitäten, die gleichfalls invers geworden ſind, anwenden kann, ſo iſt es deutlich, daſs man auch dieſen allgemeinen Grundſatz aufſtellen kann.

25. Um die Formeln irgend eines Syſtems von Quantitäten auf ein anderes

System anwendbar zu machen," das ihm indirekt correlativ ist, muss man

1) die Correlation der absoluten Werthe festsetzen, indem man für jeden derselben, der zum Ursystem gehört, das als Mittel der Vergleichung angenommen wird, den absoluten Werth, der ihm im andern Systeme entspricht, setzt;

2) die Correlation der Zeichen aufstellen, indem man in den Formeln das Zeichen jeder Quantität, die sich in inverser Richtung im zweyten System findet, verändert, und im Gegentheil allen andern das Zeichen lässt, das die ihr entsprechende im Ursystem hat.

Hieraus können wir schliessen, dass die Zeichen + und — wirklich zwey sehr verschiedene Verrichtungen in der Rechnung haben; erstlich Addition oder Subtraktion anzuzeigen; zweytens die successiven Veränderungen auszudrücken, die in einem veränderlichen Systeme eintreten, und die verschiedenen Grade der Conformität, oder Nicht-Conformität zu bemerken, die es in den verschiedenen Zuständen der Umformung in Hinsicht auf seinen ersten Zustand behält.

Diese beyden Verrichtungen haben zugleich statt, als wechselseitige Folgen, und nicht Kraft verschiedener Uebereinkunft. Wäre es, wie man oft annimmt, Kraft verschiedener Uebereinkunft, so müsste man beweisen, dass diese Uebereinkünfte nichts mit

einander Unverträgliches haben, und dafs fie zu denfelben Regeln für die Zufammenftellung der Zeichen in algebraifchen Verrichtungen führen. Aber weil fie, wie man eben gefehen hat, nothwendige wechfelfeitige Folgen find, fo leuchtet daraus die Identität der abgeleiteten Regeln deutlich hervor.

26. Das neue Zeichen, das fo jeder Werth erhält, wird fein Zeichen der Correlation genannt, und diefe Quantität zufammen mit ihrem Zeichen der Correlation genommen, ihr Werth der Correlation. So, indem man annimmt, dafs P der abfolute Werth von irgend einer der Quantitäten des Urfyftems fey, p der abfolute Werth der ihr im umgeformten Syftem entfprechenden Quantität, fo wird, wenn die letzte Quantität invers ift, — ihr Zeichen der Correlation, und $-p$ ihr Werth der Correlation feyn.

27. Weil nach diefen Definitionen das Zeichen der Correlation irgend einer Gröfse das ift, was fie annehmen mufs, wenn man auf das indirekt correlative Syftem, deffen Theil fie ift, die Formeln des Urfyftems anwenden will, fo folgt deutlich aus dem vorher bewiefenen Grundfatze, dafs jede Quantität, die in dem indirekt correlativen Syfteme direkt bleibt, + als Zeichen der Correlation hat, und dafs umgekehrt jede Gröfse des indirekt correlativen Syftems, wenn fie + als Zeichen der Correlation hat, direkt bleibt. Dafs eben fo jede Quantität, die in dem indirekt correlativen Syftem invers wird, — als Zeichen der Correlation hat, und umgekehrt jede Quantität

des indirekt correlativen Syſtems, die — zum Zeichen der Correlation hat, invers wird.

Wir wollen z. B. annehmen, wenn a eine beſtändige, oder allgemeiner eine direkte Quantität, und x eine veränderliche iſt, entdeckt man, daſs das, was $a + x$ im Urſyſteme war, $a - x$ im umgeformten Syſteme wird, ohne daſs ſonſt eine Quantität weder durch o, noch durch ∞ gegangen ſey. Hier ſchlieſst man, daſs x invers geworden ſey, weil es ſein Zeichen verändert hat in einer Verrichtung, wo ſonſt nur Quantitäten ſind, die nicht ihr Zeichen verändert haben. Denn nimmt man für das Urſyſtem $a + x = q$, ſo wird dieſe Gleichung für das umgeformte Syſtem nach der Hypotheſe $a - x = q$; man hat alſo für den erſten Fall $x = q - a$, und für den zweyten $x = a - q$, alſo ſind a und q zur inverſen Ordnung übergegangen, alſo iſt ihr Unterſchied x invers geworden. Es würde eben ſo ſeyn, wenn das, was $a - x$ im Urſyſtem wäre, $a + x$ im umgeformten würde.

Eben ſo in irgend einer Rechnung, um ſich zu verſichern, ob ein veränderliches x direkt bleibt, oder invers wird, braucht man bloſs zu betrachten, was eine Funktion wird, in der x ſich mit andern Gröſsen, die alle direkt geblieben ſind, vermiſcht findet. Entdeckt man, daſs in dieſer Funktion weder die veränderliche, noch irgend eine von den andern ihr Zeichen verändere, ſo iſt das ein Beweis, daſs dieſe veränderliche auch direkt geblieben iſt. Aber findet man, daſs, wenn die andern alle ihr Zeichen behalten müſſen, nur die veränderliche es verändern muſs, ſo iſt dieſs ein Beweis, daſs ſie invers wird;

denn stellt man diese Funktion durch X dar, und zieht aus dieser Gleichung, nachdem man $X = Q$ gemacht hat, den Werth von X als unbekannt, so hat sie für beyde Systeme dieselbe Form, wenn sie nicht das Zeichen verändert hat, aber hat sie diess, so muss man, um dasselbe Resultat zu erhalten, es von neuem verändern; also wird im ersten Fall X direkt geblieben, im zweyten X invers geworden seyn.

28. Im Allgemeinen, um an den Veränderungen, die die Zeichen der Werthe betreffen, welche die verschiedenen Quantitäten im umgeformten Systeme annehmen, zu erkennen, ob diese Quantitäten direkt bleiben, oder invers werden, ist es deutlich nach dem Gesagten, dass man dieselbe Regel befolgen muss, welche die Algebra für die Verbindung der Zeichen aufstellt; d. h. dass die Summe von zwey Quantitäten, wovon jede direkt geblieben ist, auch direkt bleibt; dass die Summe zweyer inverser Quantitäten selbst invers ist; dass die Summe einer direkten und inversen Quantität selbst direkt oder invers ist, nachdem die erstere die grössere oder die kleinere von beyden ist; dass das Produkt zweyer Quantitäten, die beyde direkt oder beyde invers sind, immer selbst direkt ist, eben so wie ihr Quotient, und dass im Gegentheil, nimmt man eine direkte und eine inverse Quantität, sowohl Produkt als Quotient invers sind.

Das kann auch geradezu für jeden einzelnen Fall bewiesen werden. Ich nehme z. B. an, dass p, q zwey inverse Quantitäten seyen, so ist pq eine direkte Quantität. In der That, nach den Definitionen, wenn man annimmt, dass p, q im Ursystem P, Q seyen,

mufs P der Unterfchied $M - N$ zweyer Quantitäten feyn, von denen die gröfsere M im umgeformten Syfteme die kleinere wird, d. h. $p = n - m$, indem man annimmt, dafs m, n den Quantitäten M, N entfprechen. Eben fo mufs Q, wenn es $M' - N'$ im Urfyftem ift, $n' - m'$ im umgeformten Syfteme werden, indem man annimmt, dafs m', n' den Quantitäten M', N' entfprechen. Hier mufs man alfo beweifen, dafs $(n - m) . (n' - m')$ oder

$$(mm' + nn') - (nm' + mn')$$

eine direkte Quantität fey. Sie entfpricht dem Produkte $(M - N) . (M' - N')$ oder $(MM' + NN') - (NM' + MN')$; aber da $M > N$, $M' > N'$, $n > m$, $n' > m'$, fo ift es deutlich, dafs $(M - N) . (M' - N')$ und $(n - m) . (n' - m')$ wahre Quantitäten find, alfo

$$(MM' + NN') > (NM' + MN') \text{ und}$$
$$(mm' + nn') > (nm' + mn').$$

Alfo find die beyden letzten Quantitäten in derfelben Ordnung im umgeformten Syfteme, wie die ihnen im Urfyfteme entfprechenden; alfo ift ihr Unterfchied eine direkte Quantität; aber diefer Unterfchied

$$(mm' + nn') - (nm' + mn') = (n - m) . (n' - m') = pq$$

alfo ift pq eine direkte Quantität, was zu erweifen war.

29. Wenn in zwey Syftemen, die mit einem Urfyfteme correlativ find, zwey fich entfprechende Quantitäten daffelbe Zeichen der Correlation haben, fo fagen wir, dafs diefe Quantitäten unter fich in direkter Correlation find, felbft wenn das Zeichen der Correlation — ift; d. h. wenn felbft jede diefer Quantitäten fich in inverfer Correlation mit der, ihr

im Urſyſteme entſprechenden, befände; weil, wenn man, wie man immer kann, eines dieſer neuen Syſteme als Maaſsſtab zur Vergleichung annimmt, das Zeichen der Correlation der Quantität, die zu dem andern gehört, wieder + würde; denn dieſe beyden ſich entſprechenden Quantitäten ſind wohl, eine wie die andere, invers, in Hinſicht auf das Syſtem, das jetzt als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt; aber eine iſt in Hinſicht auf die andere in direktem Sinn.

30. Wenn zwey correlative Syſteme als ein und daſſelbe veränderliche Syſtem in zwey verſchiedenen Lagen betrachtet werden, wie z. B. das Syſtem der Coordinaten bey einer Curve; indem die correlativen Quantitäten dann durch dieſelben Buchſtaben ausgedrückt ſind, z. B. die Abſciſſen durch x, und die Ordinaten durch y; und ſo die erſte Forderung des vorher ausgedrückten Grundſatzes (25) erfüllt iſt; ſo braucht man bloſs, um für das eine Syſtem die Formeln des andern anwendbar zu machen, die zweyte Forderung zu erfüllen, d. h. die Correlation der Zeichen aufzuſtellen. Alſo:

Um auf ein Syſtem von veränderlichen Quantitäten, wenn es zu irgend einer beſtimmten Lage gekommen iſt, die Formeln anwendbar zu machen, die für irgend eine andere Lage gefunden ſind, die indirekt correlativ mit der andern iſt, braucht man nur darin das Zeichen jeder veränderlichen Quantität zu verändern, die durch die Veränderung

änderung des Syſtems invers geworden iſt.

Aber da es gleichgültig für das Reſultat iſt, das Zeichen irgend einer Gröſse im Anfange, in der Mitte, oder am Ende zu verändern, ſo kann man, wie man auch gewöhnlich zur Uebereinſtimmung und Einfachheit der Rechnungen thut, für das Syſtem, in allen möglichen Stellungen betrachtet, bloſs die Formeln des Syſtems gebrauchen, das als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt, und auf das die Betrachtungen gegründet ſind, wenn man nur bey der Anwendung das Zeichen der Quantitäten ändert, die in jedem Fall ſich in inverſem Sinne finden.

31. Hat man ſo, wie eben geſagt, die Veränderungen der Zeichen gemacht, ſo werden die Formeln für das umgeformte Syſtem paſſend, d. h. eben und dieſelben mit denen ſeyn, die man gefunden hätte, wenn man die Betrachtung auf dieſes umgeformte Syſtem ſelbſt gegründet hätte, ſtatt ſie auf das Urſyſtem zu gründen. Alſo noch einmal:

1) In den Formeln, die unmittelbar anwendbar auf irgend ein Syſtem ſind, zeigen die Zeichen + und — nur ausführbare Verrichtungen an den abſoluten Quantitäten an, deren Werthe ſie afficiren.

2) Es iſt keine Veränderung der Zeichen in den Formeln des Urſyſtems vorzunehmen, um ſie unmittelbar anwendbar auf die Syſteme zu machen, die mit ihm in direkter Correlation ſtehen.

3) Damit die Formeln des Urſyſtems unmittelbar anwendbar auf irgend ein anderes Syſtem werden können, das ihm indirekt correlativ iſt, ſo muſs man in den Formeln das Zeichen jeder Quantität verändern, die im indirekt correlativen Syſtem invers wird.

32. Man ſieht hieraus, daſs, wenn man Formeln hat, die auf irgend ein Syſtem von Quantitäten unmittelbar anwendbar ſind, und darin das Zeichen einer oder mehrerer Quantitäten verändert, dieſe Formeln dadurch aufhören können auf daſſelbe Syſtem unmittelbar anwendbar zu ſeyn, und daſs, um das Syſtem zu finden, für das ſie anwendbar geworden ſind, man aus allen möglichen indirekt correlativen Syſtemen dasjenige ſuchen muſs, auf das die in den Zeichen vorgenommenen Veränderungen paſſen, und ſo paſſen, daſs ſie nur ausführbare Verrichtungen in den Formeln anzeigen.

Eben ſo, wenn man irgend ein Syſtem hat und es durch unmerkbare Veränderung umſchafft, ſo muſs man, um die Formeln zu finden, die ihm in ſeinem neuen Zuſtande unmittelbar anwendbar ſind, auf alle mögliche Art die Zeichen der Quantitäten, die zur Zuſammenſetzung des Urſyſtems gehören, verändern, und dann bey aller dieſer Veränderung der Zeichen ausforſchen, welche die ſind, die der Umformung des Syſtems Genüge leiſten können.

33. Es wäre möglich, daſs keine Veränderung von + in —, mit den Quantitäten in den Formeln des Urſyſtems vorgenommen, der Umformung dieſes

Syſtems Genüge leiſtete, und daſs man einige oder alle Zeichen von + in $\sqrt{-1}$ oder andere eingebildete Wurzeln der Einheit verändern müſste. In dieſem Fall wäre das umgeformte Syſtem mit dem erſten weder direkt, noch indirekt correlativ; und folglich fänden die vorher aufgeſtellten Grundſätze hier nicht mehr ihre Anwendung, weil ſie nur in der Vorausſetzung aufgeſtellt ſind, daſs beyde Syſteme in Correlation wären, einerley, ob in direkter oder indirekter. Doch würde das neue Syſtem mit dem Urſyſteme eine Art von Analogie behalten, von der ich weiter unten reden werde, und die ich mit dem Namen eingebildete Correlation bezeichnet habe.

34. Da man alſo, um die Formeln eines Urſyſtems auf ein indirekt correlatives Syſtem, in dem nur eine inverſe Quantität wäre, anwendbar zu machen, nothwendig ihr Zeichen verändern muſs; ſo folgt, daſs wechſelſeitig, wenn man dieſe invers gewordene Quantität als unbekannt in dieſen Formeln annimmt, und ihren Werth daraus zieht, das, was man durch Auflöſung der Gleichung erhält, nicht der geſuchte Werth ſelbſt, aber wohl dieſer Werth mit negativem Zeichen ſey. Denn da man nicht das Zeichen dieſer Quantität in den Urformeln verändert hat, ſo muſs man es nothwendigerweiſe im Reſultate ändern, um dieſs Reſultat genau, d. h. anwendbar auf das umgeformte Syſtem zu machen.

35. Wenn wir annehmen, daſs man nicht gleich weiſs, ob die geſuchte Quantität direkt oder invers iſt, ſo kann man daraus, daſs ihr Werth negativ iſt,

schliefsen, dafs sie invers sey, d. h. dafs das System, zu dem sie gehört, nur mit dem Ursystem eine indirekte Correlation habe, und dafs, um diefs neue System zu kennen, man bey allen möglichen correlativen Systemen das suchen müsse, dem die Formeln des Ursystems Genüge leisten können, wenn man das Zeichen der als invers anerkannten Quantität darin geändert hat.

36. Folglich, wenn, bey der Auflösung einer Aufgabe, man für die Unbekannte einen negativen Werth fände, so würde diefs ein Beweis seyn, dafs die Aufgabe, so wie sie aufgestellt ist, nicht auflösbar sey, und dafs, um sie dazu zu machen, man ihren Ausdruck modificiren müsse. Die Aufgabe könnte auch nicht genau in Gleichung gesetzt seyn, weil man das System anders angenommen hätte, als es sich wirklich findet; d. h. weil man statt des Systems, auf das die Betrachtung gegründet seyn soll, vielleicht ein anderes genommen hat, das mit dem erstern nur in indirekter Correlation steht. Um diese Gleichungen zu berichtigen, und das wahre System zu finden, auf das sich die Frage bezieht, wenn sie überhaupt auflösbar ist, mufs man in allen Gleichungen, durch die man zum gefundenen Resultat gekommen ist, und in diesem Resultate selbst das Zeichen der Unbekannten ändern, und dann untersuchen, welches das neue System sey, auf das diese Gleichungen und diefs Resultat unmittelbar anwendbar werden. Denn auf dieses neue System müssen die Betrachtungen gegründet seyn, hierauf beziehen sich die so berichtigten Gleichungen, und folglich ist es diefs System und

dieſe berichtigten Gleichungen, die die Auflöſung der Aufgabe geben werden.

Z. B. man ſoll den Abſchnitt $\overline{CD}$ in dem Dreyeck ABC finden (*Fig.* 1.), indem man die 3 Seiten als bekannt annimmt, und ſo, daſs $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{AB}$.

Da wir noch nicht wiſſen, ob der Punkt C ſich zwiſchen B und D befindet, oder ob der Punkt D zwiſchen B und C ſeyn ſoll, ſo wollen wir für's erſte die Rechnung auf dieſe letzte Vorausſetzung gründen.

Wir haben dann (23)

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2.$$

Ferner weil wir annehmen, daſs D zwiſchen B und C fällt, ſo haben wir auch $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{DC}$ oder $\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2 - 2 \, . \, \overline{BC} \, . \, \overline{CD}$. Setzt man dieſen Werth von $\overline{BD}^2$ in die obige Gleichung, ſo erhält man

$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2\overline{BC} \, . \, \overline{CD}$, was, weil $\overline{AC} = \overline{BC} = \frac{2}{3}\overline{AB}$ nach der Reduktion $\overline{CD} = -\frac{1}{12}\overline{AB}$.

d. h. die Rechnung giebt für die Unbekannte $\overline{CD}$ einen negativen Werth. Alſo iſt das Problem, wenn es überhaupt auflösbar iſt, nicht richtig in Gleichung geſetzt, weil man die Betrachtungen auf ein anderes Syſtem, als es wirklich ſeyn muſs, gegründet hat, d. h. auf ein Syſtem, das ſich nicht mit den aufgeſtellten Bedingungen vereinigen läſst. Man muſs alſo dieſs Syſtem, und die Gleichungen, die uns zum gefundenen Reſultat geführt haben, berichtigen, indem man in dieſen Gleichungen und im Reſultat das Zeichen von $\overline{CD}$ verändert, und dann unterſucht, welches neue Syſtem dieſer Veränderung Genüge leiſten könne.

Nun wird die Gleichung, die $\overline{BD} = \overline{BC} - \overline{CD}$ war, durch diese Veränderung

$$\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD},$$

welche nicht statt haben kann, wenn der Punkt C sich nicht zwischen B und D befindet. Diess ist also das neue System, dem die Veränderung des Zeichens von $\overline{CD}$ Genüge leistet, d. h. das wahre System, auf das man die Betrachtung gründen muss. Wenn man also auch das Zeichen von $\overline{CD}$ im Resultate oder der Endgleichung, die wir gefunden haben,

$$\overline{CD} = -\tfrac{1}{12}\overline{AB}$$

verändert, haben wir als berichtigtes Resultat $\overline{CD} = \tfrac{1}{12}\overline{AB}$. Also das wahre System, das den Bedingungen der Aufgabe genug thut, ist das, in dem man annimmt, dass C zwischen B und D falle, und der wahre Werth von $\overline{CD}$ ist $CD = \tfrac{1}{12}\overline{AB}$. Wirklich findet man auch diesen Werth für $\overline{CD}$, wenn man die Rechnung in der letzten Voraussetzung wieder anfängt.

37. Hätte die Gleichung mehrere Wurzeln, theils positive, theils negative, so würden die ersten zeigen, dass die aufgestellten Bedingungen wirklich mit dem System von Quantitäten, auf das die Betrachtungen gegründet waren, übereinkamen; und jede von ihnen würde in der That der aufgegebenen Frage Genüge leisten. Im Gegentheil könnten die negativen Wurzeln, da sie nicht wirkliche Quantitäten sind, nicht diesen Bedingungen Genüge leisten, ohne vorher modificirt zu seyn, oder ohne dass man die Voraussetzungen, auf die man die Betrachtungen gründete, modificirte. Daher folgt, dass diese Wurzeln sich

nicht genau auf die in Gleichung gesetzte Frage beziehen, sondern dass sie bloss andere mit dieser analoge Fragen anzeigen können: dass, um zu finden, welche diese andern Fragen sind, wenn sie überhaupt da sind, man das Zeichen der Unbekannten, sowohl in der Endgleichung, als auch in denen, die laut der Rechnung dahin geführt haben, verändern muss, und dann untersuchen, welches das neue System sey, oder die neuen Bedingungen, die dieser Veränderung der Zeichen Genüge leisten können.

Wir wollen z. B. annehmen, der Gegenstand der Aufgabe sey: auf der unbestimmten geraden Linie $\overline{FG}$ (*Fig.* 2.) einen Punkt M zu finden, der gewissen Bedingungen entspräche, man habe ferner auf der Linie einen festen Punkt F genommen, und die Frage darauf zurückgebracht, die Entfernung $\overline{FM}$, die man als unbekannt ansieht, zu finden, man habe endlich für eben diese Unbekannte, die ich x nenne, zwey Werthe gefunden, den einen positiv, den andern negativ: so giebt der erste augenscheinlich den gesuchten Punkt M; aber was bedeutet die andere Wurzel? Um diess zu entdecken, muss man bemerken, dass die Frage war, im Allgemeinen auf der unbestimmten geraden Linie einen Punkt M zu finden, der gewissen Bedingungen entspräche, und dass, da die Frage bloss in der Voraussetzung in Gleichung gesetzt ist, dass der Punkt M rechts vom festen Punkte F liege, man nur theilweise die aufgestellte Bedingung ausgedrückt hat; denn es ist ja auch möglich, dass der gesuchte Punkt links von F liegt. Nun behaupte ich, dass der gefundene negative Werth gerade der ist, den man

links vom Punkte F auftragen muſs, um dieſer zweyten Vorausſetzung zu entſprechen, d. h. wenn man annimmt, daſs die beyden durch die Gleichung gegebenen Wurzeln

$$x = m \text{ und}$$

$$x = -m'$$

ſeyen, ſo hat man als erſte Auflöſung der allgemeinen Frage, den Punkt M rechts vom Punkte F, wie man ihn bey Setzung der Gleichung vorausgeſetzt hat, als zweyte Auflöſung den Punkt M', den man erhalten wird, wenn man m' links vom Punkte F trägt.

In der That, weil wir nur durch die Wurzel $x = m$ der partiellen Frage entſprochen haben, wo man den Punkt M rechts von F annimmt, ſo wollen wir nun ſehen, was man thun muſs, um auch den Fall zu beantworten, wo man den geſuchten Punkt links von F annimmt.

Statt alſo für die Unbekannte, wie vorher, die Entfernung des Punktes F vom geſuchten Punkte zu nehmen, ſo wollen wir nach Belieben einen andern Punkt K, jenſeits des Punktes M' nehmen, den man erhalten wird, wenn man $\overline{FM'} = m'$ macht, und ferner für die Unbekannte die Entfernung des neuen Punktes K vom geſuchten Punkte erwählen. Dieſe Unbekannte heiſse y, und die willkührliche Entfernung $\overline{FK}$ heiſse h.

Es iſt deutlich, daſs, um den Punkt M zu haben, der die ſchon oben angeführte Auflöſung giebt, ich nur in der gefundenen Gleichung $x = m$, $y - h$ an die Stelle von x, und im Gegentheil, wenn ich

die Gleichung in y habe, um die Gleichung in x wiederzufinden, $h + x$ ſtatt y zu ſetzen habe.

Jetzt, um den andern Punkt zu haben, der der Frage Genüge leiſte, wenn ſich ein zweyter rechts von K, wie der erſte, findet, bemerke ich, daſs, wenn es wirklich einen giebt, wie er ſich denn auf derſelben Seite mit M findet, ſo muſs die neue Aufgabe, wie die vorige, die den Punkt M finden ſollte, in Gleichung geſetzt werden, indem die beyden Syſteme wirklich in dieſem Fall direkt correlativ ſind. Alſo muſs dieſelbe Gleichung nur zwey Auflöſungen geben, d. h. die Entfernung des Punktes K vom neuen geſuchten Punkte iſt der zweyte Werth von y, den die Gleichung geben muſs, wo dieſe Gröſse y als unbekannt angenommen iſt.

Dieſs feſtgeſetzt, wenn es nun wirklich zwey Punkte giebt, die der Frage Genüge leiſten, ſo iſt es deutlich, daſs der eine rechts, der andere links vom Punkte F liegen muſs; denn hätten ſie beyde zur Rechten gelegen, ſo wäre gar kein Grund geweſen, warum die in x gefundene Gleichung dem einen den Vorzug vor dem andern hätte geben ſollen; alſo giebt es einen neuen Punkt rechts von K, der der aufgeſtellten Frage Genüge leiſte, ſo kann er nur zwiſchen K und F liegen. Alſo wenn wir in dieſer neuen Gleichung, wie in der erſten, die Entfernung dieſes geſuchten Punktes von F, x nennen, ſo hat man, weil $\overline{KF} = h$, $y = h - x$. Alſo um x zu haben, muſs man in der in y gefundenen Gleichung, $h - x$ ſtatt dieſer Quantität y ſetzen. Aber, wie man oben geſehen hat, um den Punkt M zu finden, müſste

man $h + x$, ſtatt y ſetzen. Alſo ſind die beyden Gleichungen, von denen eine die Entfernung von M, die andere die Entfernung von M' geben ſoll, bloſs durch das Zeichen der Unbekannten unterſchieden. Alſo iſt nur das Zeichen der Unbekannten in der erſtern zu ändern, um die andere zu erhalten. Alſo iſt die Wurzel, welche die neue Unbekannte giebt, genau dieſelbe mit der, welche die andere gab, nur mit negativem Zeichen; alſo giebt es in der That einen neuen Punkt, der die Frage auflöſt, und zwiſchen K und F genau bey'm Punkte M' liegt, weil nach der Vorausſetzung, um dieſen Punkt M' zu haben, man von F nach M' die Quantität m' getragen hat, welches der Werth war, den die erſte Gleichung für x, mit negativem Zeichen gab.

Man ſieht, daſs der Grund, weswegen ſich eine negative Wurzel für x findet, darin liegt, daſs man nur theilweiſe die Bedingungen der Aufgabe ausgedrückt hatte, indem man annahm, wie man ſie in Gleichung ſetzte, daſs der geſuchte Punkt ſich rechts von F finden müſſe. Aber beyde Wurzeln werden gleich poſitiv, wenn man die Hypotheſe erweitert, indem man den feſten Punkt nach K trägt, und ihr ſo die nöthige Ausdehnung giebt, damit ſie die beyden Auflöſungen umfaſſen könne, deren die Frage fähig iſt. So entſpricht jede der Wurzeln einer partiellen Frage, die man durch eine und dieſelbe Gleichung umfaſſen kann, deren beyde Wurzeln bedeutend ſind, und keine Modifikation verlangen.

38. Um ein anderes Beyſpiel zu geben, wollen wir annehmen, daſs die gegebene Gleichung ſich auf

eine Curve beziehe, deren Ordinate, als unbekannt betrachtet, durch y vorgeſtellt ſey, und daſs für einen gewiſſen beſtimmten Werth der Abſciſſe es unter den Werthen von y einen oder mehrere negative gebe.

Es folgt aus dem, was (37) geſagt iſt, daſs jede der poſitiven Wurzeln für y einen Werth giebt, der unmittelbar den Bedingungen, durch welche die Natur der Curve beſtimmt iſt, Genüge leiſtet, eben ſo wie den Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gebaut iſt. Z. B. wenn dieſe Betrachtung in der Vorausſetzung aufgeſtellt iſt, daſs die Ordinaten rechts von der Axe genommen würden, ſo giebt jede poſitive Wurzel wirklich einen Punkt der Curve rechts von der Axe, aber keine von den negativen Wurzeln kann derſelben Vorausſetzung entſprechen. Nun muſs man alſo, um zu erfahren, was dieſe negativen Wurzeln bedeuten, ihr Zeichen verändern, und dann ſehen, welche Modifikationen man mit dem Syſtem vornehmen muſs, auf das die Betrachtung gegründet iſt, damit die ſo geänderte Gleichung ihm Genüge leiſte, d. h. in dem neuen Syſteme die gegebenen Bedingungen ausdrücke, durch welche die Natur der Curve beſtimmt iſt.

Nun behaupte ich, daſs dieſs neue Syſtem, dem die ſo modificirte Gleichung entſpricht, nichts anders, als der Theil der Curve iſt, der an der andern Seite der Axe liegt, mit Hinſicht auf das Urſyſtem, d. h. mit Hinſicht auf den Theil der Curve, auf den die Betrachtung gegründet und die Gleichung gefunden iſt.

Denn indem man y als unbekannt nimmt, fo kann man eben fo wie vorher beweifen, dafs, wenn jede pofitive Wurzel von y einen Punkt zur Rechten von der Axe der Abfciffen bedeutet, jede negative Wurzel einen Punkt auf der andern Seite bedeuten mufs; woraus man fieht, dafs bey derfelben Curve die Arme, die an den zwey verfchiedenen Seiten irgend einer Axe liegen, zwey indirekt correlative Syfteme bilden.

39. Aus ähnlichen Beyfpielen, die freylich häufig genug find, glaubte man allgemein fchliefsen zu können, dafs in der Geometrie die negativen Wurzeln immer wirkliche Quantitäten bedeuteten, die nur in entgegengefetzter Richtung von den pofitiven Wurzeln genommen wären. Aber diefer Schlufs fcheint vielen Einfchränkungen unterworfen zu feyn; denn wenn das negative Zeichen, das die Wurzeln afficirt, wie man vorher gefehen hat, daher kommen kann, dafs die vorgelegte Frage unverträgliche Bedingungen in fich fafst, oder dafs man die Betrachtungen auf Hypothefen, die mit diefen Bedingungen unverträglich find, gegründet hat; fo kann es auch daher kommen, dafs die algebraifchen Umformungen nichts bedeutende Wurzeln mit pofitiven amalgamirt haben, welches die einzigen find, die wirklich und ganz die Frage auflöfen; auch ift es leicht, durch viele Beyfpiele darzuthun,

1) dafs fich oft negative Wurzeln finden, die durchaus nichts bedeuten;

2) dafs felbft, wenn fie bedeutend find, fie nicht

immer in entgegengesetzter Richtung genommen werden müssen.

So zum Beyspiel ist es deutlich, dass ein Cirkel nicht zwey Halbmesser haben kann; wenn man aber die drey Seiten eines Dreyecks a, b, c nennt, und dann den Halbmesser des umschriebenen Cirkels sucht, so erhält man

$$R = \frac{abc}{\pm\sqrt{(2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4))}}$$

was für R zwey Werthe giebt, den einen positiv, den andern negativ, wenn man der Wurzelgröfse das doppelte Zeichen giebt. Aber ein Cirkel mit negativem Halbmesser ist ungereimt, also bedeutet die zweyte Wurzel nichts.

Als zweytes Beyspiel wollen wir folgende Frage aufstellen: Wenn zwey Punkte A, B auf der Peripherie eines Cirkels gegeben sind, auf dieser Peripherie einen dritten Punkt K zu finden, dessen jedesmalige Entfernungen $\overline{AK}$. $\overline{BK}$ von den zweyen Punkten A und B in gegebenen Verhältnissen sind. (*Fig.* 5.). Ich nehme $\overline{BK}$ als unbekannte an

$$= x$$

Das gegebene Verhältniss $\dfrac{\overline{AK}}{\overline{BK}} = a.$

Die gegebene gerade Linie $\overline{AB} = b.$

Den bekannten Winkel $AKB = K.$

Nach den bekannten Eigenschaften der Dreyecke werden wir $\overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 + \overline{BK}^2 - 2.\overline{AK}.\overline{BK}.\cos AKB$ haben, wo, weil $\overline{AK} = a.\overline{BK}$

$b^2 = a^2x^2 + x^2 - 2ax^2 \cos k$ hieraus zieht man

$$x = \frac{b}{\pm\sqrt{(1 + a^2 - 2a\cos K)}}$$

Hier find nun zwey algebraifche Auflöfungen, d. h. zwey Wurzeln, die eine pofitiv, die andere negativ; über den Gebrauch der erften kann gar keine Ungewifsheit ftatt finden, aber was bedeutet die negative Wurzel? Soll man vielleicht vom Punkte B, mit dem abfoluten Werth, der für x gefunden ift, einen Bogen $\overline{KR}$ befchreiben, und werden die Punkte K und R die zwey Auflöfungen geben? Aber das ift nicht der Fall, denn man fieht leicht ein, dafs, wenn man zum Beyfpiel $\overline{AK} = 2 . \overline{BK}$ annehme, d. h. $a = 2$, K und R nicht zugleich beyde diefe Bedingungen erfüllen können; und noch mehr, dafs $\overline{BK}$ und $\overline{BR}$ fich nicht in entgegengefetzter Richtung finden würden, wie man annimmt, dafs es feyn foll. Aber von der andern Seite kann diefe zweyte Wurzel nicht falfch feyn, weil fie ftrenge aus einer genau geftellten Gleichung abgeleitet ift, alfo ift fie blofs unbedeutend.

Noch mehr, die Aufgabe hat in der That zwey wirkliche Auflöfungen, aber die oben gefundene negative Wurzel bezieht fich auf keine von beyden, und um die zweyte zu finden, mufs man die Aufgabe in Gleichung fetzen, indem man von einer neuen Hypothefe ausgeht.

Wir nehmen an, dafs der Punkt K auf dem Theile AKB des Umkreifes wäre, und die gefundene Auflöfung pafst zu diefer Hypothefe. Aber man hat gar keinen Grund anzunehmen, dafs der gefuchte Punkt eher auf diefem, als auf dem andern Theile liege. Wir wollen jetzt annehmen, dafs der gefuchte Punkt in K' liege. Da nun der Winkel $AK'B$ das

Supplement des gegebenen Winkels k ist, so hat man $cos\, AK'B = - cos\, k$ und folglich wird die gefundene Gleichung für den gegenwärtigen Fall

$$x = \frac{b}{\pm \sqrt{(1 + a^2 + 2a \,.\, cos\, k)}}$$

Eine Gleichung, in welcher die zweyte Wurzel, nach den vorher gegebenen Gründen, bloss algebraisch und unbedeutend ist.

Die beyden wirklichen Auflösungen der Aufgabe lassen sich, wie man sieht, in diese Formel vereinigen

$$x = \frac{b}{\sqrt{(1 + a^2 \pm 2a \,.\, cos\, k)}}$$

die weder die eine, noch die andere der vorher gefundenen Gleichungen ist.

40. Wir haben eben gesehen, dass, wenn eine Gleichung zwey Wurzeln hat, beyde deswegen nicht zwey wirkliche Auflösungen für die Frage geben. Dasselbe Beyspiel soll uns dienen, zu beweisen, dass, wenn gleich eine Aufgabe zwey wirkliche Auflösungen zulässt, man nicht daraus folgern kann, dass die Endgleichung zwey Wurzeln habe, aber dass man jede für sich durch eine Gleichung des ersten Grades finden kann. Diess hängt von einer passenden Wahl der Unbekannten ab.

Wir wollen den Perpendikel $\overline{KD}$ auf $\overline{AB}$ senken, als Unbekannte $\frac{\overline{AD}}{\overline{KD}}$ annehmen, und diess Verhältniss z nennen. Das Dreyeck AKB giebt uns

$$\overline{BK} : \overline{AK} = \sin KAB : \sin KBA \text{ oder}$$

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{BK}} \text{ d. h. } a = \frac{\sin KBA}{\sin KAB} \text{ oder}$$

$$a \cdot \sin KAB = \sin KBA = \sin (K + KAB)$$

$= \sin K \cdot \cos KAB + \cos K \cdot \sin KAB$, welches durch $\sin KAB$ getheilt $a = \sin K \cdot \cot KAB + \cos K$ giebt.

Aber es ist augenscheinlich, daſs das rechtwinklichte Dreyeck AKD, $\cot KAB = \frac{\overline{AD}}{\overline{KD}} = z$ giebt; setzt man diesen Werth in die vorhergehende Gleichung, so erhält man $z = \frac{a - \cos K}{\sin K}$, eine Gleichung, die nur vom ersten Grade ist.

Diese Auflösung entspricht, wie vorher, nur dem Theile KAB des Umkreises. Eine ähnliche Betrachtung, die man in Rücksicht des zweyten Theils angestellt hätte, würde als zweyte Auflösung $z = \frac{a + \cos K}{\sin K}$ geben, und wir könnten diese beyden Auflösungen in einer Formel vereinigen:

$$z = \frac{a \pm \cos K}{\sin K}$$

wenn sie gleich beyde besonders durch eine Gleichung des ersten Grades gefunden sind.

Obgleich die Aufgabe zwey Auflösungen zuläſst, und folglich die Gleichung natürlicherweise zum zweyten Grade steigen sollte, geschieht dieſs doch nicht, weil die Faktoren dieser Gleichung rationel sind, und sie sich so in zwey Gleichungen vom ersten Grade auflöst. Dasselbe hat auch für höhere Grade statt, wenn

wenn man eine glückliche Wahl der Unbekannten trifft, denn wir werden sehen, daſs durch eine Gleichung des zweyten Grades man oft die Auflösung einer Frage erhält, die 4, 8, selbst 16 verschiedene wirkliche Auflösungen hat.

41. Ich schlieſse hieraus, daſs man nie genau von der Zahl der wirklichen Auflösungen einer Aufgabe aus der Zahl der algebraischen positiven und negativen Wurzeln der Gleichung urtheilen kann, selbst wenn man ganz von den eingebildeten Wurzeln absieht; daſs die Zahl der algebraischen positiven und negativen Wurzeln gröſser seyn kann, als die Zahl der wirklichen Auflösungen, weil die verschiedenen Umformungen, die man mit der Gleichung vornehmen müſste, um sie rational zu machen, die bedeutungslosen Wurzeln mit den wirklichen haben verschmelzen können; und daſs die Zahl der wirklichen Auflösungen auch gröſser seyn kann, als die der algebraischen Wurzeln, weil die Gleichung sich in mehrere rationale Faktoren auflösen lieſs, von denen einige sich nicht mehr in der Endgleichung finden. Also ist die Regel, die negativen Wurzeln in die entgegengesetzte Richtung von den positiven zu tragen, zum wenigsten sehr unbestimmt. Aber noch mehr, wir werden sehen, daſs sie falsch ist, und daſs selbst, wenn die negativen Wurzeln wirkliche Auflösungen anzeigen, sie doch nicht immer in entgegengesetzter Richtung von den positiven Wurzeln genommen werden müſsen.

42. Die Aufgabe sey: wenn eine Sehne $\overline{BC}$ willkührlich in einem gegebenen Cirkel gezogen ist

Bayerische Staatsbibliothek München

(*Fig.* 4.). Durch den Punkt A, wo der Bogen BAC von einem aus der Mitte von $\overline{BC}$ errichteten Perpendikel geſchnitten wird, eine neue Sehne $\overline{AK}$ ſo zu führen, daſs der Theil $\overline{HK}$, welcher zwiſchen der gegebenen Linie $\overline{BC}$ und dem Endpunkte K der Sehne $\overline{AK}$ liegt, einer gegebenen Linie gleich ſey.

Ich nehme $\overline{AH}$ als Unbekannte an $= z$.
Die gegebene Sehne $\overline{BC}$ $= a$.
Die gegebene Linie $\overline{HK}$ $= b$.
Den bekannten Perpendikel $\overline{AF}$ $= c$.

Durch die Eigenſchaft der Sehnen, die ſich in einem Cirkel ſchneiden, hat man

$$\overline{HK}.\overline{AH} \text{ oder } bz = \overline{BH}.\overline{CH} = (\overline{BF} + \overline{FH}).(\overline{BF} - \overline{FH})$$
$$= \overline{BF}^2 - \overline{FH}^2 = \tfrac{1}{4}a^2 - \overline{FH}^2.$$

Aber das rechtwinklichte Dreyeck AFH giebt

$$\overline{FH}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AF}^2 = z^2 - c^2$$

ſetzt man dieſen Werth von $\overline{FH}^2$ in die vorige Gleichung, ſo erhält man

$$bz = \tfrac{1}{4}a^2 - z^2 + c^2, \text{ woraus man erhält}$$
$$z = -\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)}$$

was man finden ſollte.

Von dieſen beyden Wurzeln, wovon die eine poſitiv, die andere negativ iſt, entſpricht die erſte unmittelbar der aufgeſtellten Frage, und der Hypotheſe, auf welche die Betrachtung gegründet iſt; nämlich daſs $\overline{KH}$ auf der Fläche des Cirkels liegt; die zweyte entſpricht der Hypotheſe, wo H auſserhalb $\overline{BC}$ auf ihre Verlängerung in H' fällt. Da die Bedingung nämlich bloſs iſt, daſs der Theil zwiſchen $\overline{BC}$ und dem Umkreiſe $= b$ ſey, ſo kann man ihn auch auſserhalb, zwiſchen K' und H', eben ſo gut

wie inwendig zwischen K und H nehmen. Das ist also die zweyte wirkliche Auflösung, welche die negative Wurzel anzeigt. Nun sind aber $\overline{AH}$ und $\overline{AH'}$ nicht in entgegengesetzter Richtung. Also, wie ich vorher gesagt habe, die negativen Wurzeln, selbst wenn sie wirkliche Auflösungen ausdrücken, finden sich nicht immer in entgegengesetzter Richtung von den positiven.

Diese Auflösung bestätigt, was ich vorher gesagt habe, nämlich dass durch eine passende Wahl der Unbekannten man eine Endgleichung erhalten kann, die von geringerem Grade ist, als die Zahl der Auflösungen, deren die Aufgabe fähig ist; denn im gegenwärtigen Fall, obgleich die Gleichung nur zum zweyten Grade steigt, hat die Aufgabe wirklich vier Auflösungen, die zwey nämlich, die man rechts vom Punkte F gefunden hat, und zwey ähnliche, die links liegen. Es ist gar kein Grund da, indem die Figur symmetrisch ist, warum die Punkte H, H' eher zur Rechten als zur Linken von F fallen sollten.

Auch würde es leicht seyn, diese vier Auflösungen durch eine und dieselbe Gleichung vom vierten Grade zu erhalten, wenn man eine andere Unbekannte, z. B. $\overline{FH}$ annimmt $= y$. So giebt uns das rechtwinklichte Dreyeck AFH

$$\overline{FH}^2 = \overline{AH}^2 - \overline{AF}^2 \text{ oder } y^2 = z^2 - c^2$$

$$\text{oder } y = \pm\sqrt{(z^2 - c^2)} \text{ oder}$$

$$y = \pm\sqrt{[(-\tfrac{1}{2}b \pm \sqrt{(c^2 + \tfrac{1}{4}a^2 + \tfrac{1}{4}b^2)})^2 - c^2]}$$

eine Gleichung, die die vier gesuchten Auflösungen giebt, indem die positiven Wurzeln $\overline{FH}$ und $\overline{FH'}$

anzeigen, die negativen aber dieselben Quantitäten in entgegengesetzter Richtung genommen.

43. Aus allem, was gesagt ist, sieht man, daſs die gewöhnlich gegebene Regel für den Gebrauch der negativen Wurzeln in der Geometrie nicht genau ist. Sie ist es nur, wie ich es oben bewiesen habe (37), für einen sehr allgemeinen Fall (vorausgesetzt, wie man (61) sehen wird, daſs keine eingebildeten unter diesen Wurzeln sind), den nämlich, wo die Frage, wie im Fall darauf, zurückkommt, den Theil $\overline{FH}$ einer geraden Linie $\overline{BC}$ zu finden, deren Lage bestimmt ist, indem man von einem gegebenen Punkte F ausgeht; denn dann werden die positiven Wurzeln nach der Richtung $\overline{FH}$ getragen, der Hypothese gemäſs, auf welche die Betrachtung gegründet ist; und die negativen Wurzeln nach der andern Seite. Dieſs macht auch, daſs bey den Curven, deren Gleichung das Verhältniſs der Absciſſe zur Ordinate ausdrückt, welche beyderseitig zweyen gegebenen Axen parallel sind, diese Gleichung immer zu dem Grade steigt, der durch die Zahl der Durchschnittspunkte der Curve mit jeder Absciſſe oder jeder Ordinate bestimmt ist. Aber das würde nicht so statt finden, und die Gleichung würde bald auf einen höhern, bald auf einen niedrigern Grad kommen, wenn man das System der Coordinaten veränderte, indem man aufhörte sie beyderseitig parallel mit zwey gegebenen Axen zu nehmen. Denn wenn man z. B. bey einem Kegelschnitt die zwey *radii vectores* als Coordinaten annehme, so ist die Gleichung nie vom ersten Grade,

und ſie ſteigt zum vierten, wenn ſtatt der Brennpunkte man z. B. den Scheitel der Curve nimmt.

Was (37) für die gerade Linie bewieſen iſt, iſt ſichtbar auf den Umkreis eines Cirkels und auf jede andere Curve anwendbar. Wenn die Gleichung, welche die Auflöſung einer Aufgabe giebt, einen negativen Bogen zur Wurzel hat, ſo muſs dieſer Bogen poſitiv auf der entgegengeſetzten Seite genommen werden, wenn ſonſt keine eingebildete Gröſsen in dieſer Wurzel ſind.

44. Daraus, daſs die Regel, die man gewöhnlich für den Gebrauch der negativen Wurzeln in der Geometrie aufſtellt, Ausnahmen leidet, folgt durchaus nicht, daſs dieſe Wurzeln als unnütz verworfen werden müſſen. Denn gleich im Anfang habe ich bewieſen (37), daſs die Regel ihre Anwendung findet, wenn die Frage darauf zurückgebracht iſt, die Entfernung eines geſuchten Punktes von einem andern gegebenen Punkte, der auf einer gegebenen Linie iſt, zu finden, wenn nur die Endgleichnng keine eingebildete Gröſsen enthält; und es iſt eben ſo evident, daſs daſſelbe immer ſtatt hat, ſo oft die Frage darauf zurückkommt, die Entfernung eines geſuchten Punktes von Axen oder ſonſtigen feſten Ebenen zu finden, welches der gewöhnlichſte Fall iſt. Noch mehr, obgleich die negativen und eingebildeten Wurzeln nur algebraiſche Formen ſind, an ſich unbedeutend, ſo haben wir doch geſehen, daſs ſie durch ihre Umformungen zu wirklichen Reſultaten führen können, und dabey bemerkt, daſs eben im Gebrauch dieſer algebraiſchen Formen in dieſer Beziehung die

Natur der Analyſis und ihr Vortheil vor der Syntheſis beſteht. Alles dieſs iſt der falſchen Anwendung, die man davon bey Auflöſung einiger beſondern Fragen der Geometrie machen könnte, vollkommen fremd. Doch zurück auf unſere allgemeine Unterſuchung.

45. Wir haben geſehen (37), wie es möglich iſt, daſs eine und dieſelbe Formel unmittelbar und ohne alle Modifikation zwey verſchiedenen Fragen entſpreche, die anders abgehandelt zwey beſondere Auflöſungen erfordert hätten. Eine und dieſelbe Formel kann eben ſo drey und mehr Fragen enthalten, und man könnte fragen, wie, wenn man die beſondere Formel hätte, die jeder Frage eigen wäre, man die allgemeine finden könne, die ſie alle umfaſste, d. h. die auf jede von ihnen unmittelbar und ohne Modifikationen anwendbar wäre. Man kann durch verſchiedene Mittel dazu kommen, und auf allgemeine Art würde man es erhalten, wenn man immer dieſe verſchiedenen partikulären Formeln auf ihren gemeinſchaftlichen Urſprung beziehen, d. h. wenn man aus dieſen Formeln die wechſelſeitig inverſen Quantitäten verbannen könnte, die ſie nicht zuſammen paſſend machen, indem man an ihre Stelle die direkten Quantitäten ſetzte, deren Differenzen ſie ſind (24).

In der That, weil die inverſe Quantität p (24) nur durch die Subſtitution von $n-p$ ſtatt m ins Syſtem gebracht iſt, ſo iſt es deutlich, daſs man auf die erſte Ordnung kommt (d. h. auf die Formel, die nicht inverſe Quantitäten ertheilt, und die folglich auf beyde Syſteme anwendbar war), wenn man $n-m$ ſtatt p ſetzt, und wenn man daſſelbe für alle andere

Quantitäten thut, die wechſelſeitig invers zwiſchen den beyden Syſtemen ſind, ſo wird die Formel unmittelbar auf jedes von ihnen anwendbar, ohne irgend eine Veränderung der Zeichen, und wird folglich die allgemeine Formel ſeyn.

Z. B. im Dreyeck *ABCD* (*Fig.* 1.), das ſchon oben angeführt iſt, hat man als Urſyſtem, d. h. wenn *D* zwiſchen *B* und *C* fällt,

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 - 2 \,.\, \overline{BC} \,.\, \overline{CD},$$

und als umgeformtes Syſtem, d. h. wenn *C* zwiſchen *B* und *D* fällt,

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BC}^2 + 2 \,.\, \overline{BC} \,.\, \overline{CD}.$$

Dieſe beyden Formeln ſind unterſchieden, weil im letzten Falle $\overline{CD}$ invers iſt, indem man $\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{BC}$ hat, ſtatt daſs man im erſten im Gegentheil $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{CD}$ hatte. Aber will man eine Formel finden, die unmittelbar anwendbar auf beyde Syſteme ſey, ſo braucht man nur die inverſe Quantität $\overline{CD}$ herauszuſchaffen, indem man ihren Werth in direkten Quantitäten unterſchiebt, der für das zweyte Syſtem, z. B. wie man eben geſehen hat,

$$\overline{CD} = \overline{BD} - \overline{DC} \text{ iſt:}$$

woraus man

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2 \,.\, \overline{BC} \,.\, \overline{BD} - \overline{BC}^2$$

erhält, eine Gleichung, die ſtatt hat, mag der Punkt *C* zwiſchen *B* und *D*, oder der Punkt *D* zwiſchen *B* und *C* fallen.

Aber wenn der Punkt *C*, nachdem er zwiſchen *B* und *D* gekommen iſt, ſeinen Weg fortſetzte, und über den Punkt *B* hinausginge, ſo könnte ſich die Formel verändern, weil wir die aufgeſtellte Defini-

tion (24) verlassen würden, die annimmt, dass die Quantitäten M, N immer endlich bleiben, d. h. nicht, während der ganzen Veränderung des Systems, durch o oder durch ∞ gehen. Nun geht aber hier $\overline{BC}$ durch o in dem Augenblicke, wie C in B fällt. Diese Formel wird sich in der That ändern, denn wenn wir als Maasstab zur Vergleichung diess System nehmen, wenn C zwischen B und D ist, so hat man für dasselbe System

$$\overline{BC} = \overline{BD} - \overline{CD}$$

statt dass, nachdem C jenseits B gegangen ist, man im Gegentheil

$$\overline{BC} = \overline{CD} - \overline{BD} \text{ hat.}$$

Also ist $\overline{BC}$ invers, also muss man $-\overline{BC}$ an die Stelle von $\overline{BC}$ setzen, um die vorhergehende Formel unmittelbar auf den letzten Fall anwendbar zu machen. Also wird die Formel

$$\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + 2\,\overline{BC}\,.\,\overline{BD}.$$

Eben so sey $AMBM'$ (*Fig.* 5.) eine Curve auf die Axe AB bezogen; wir haben gesehen, dass die Arme AMB, $AM'B$, die an den beyden Seiten der Axe liegen, zwey indirekt correlative Systeme bilden, in welchen die sich entsprechenden Ordinaten $\overline{FM}$, $\overline{FM'}$ in Rücksicht auf einander invers sind, und in der That, wenn man auf der Verlängerung von $\overline{MM'}$ willkührlich einen festen Punkt K annimmt, so erhält man

$$\overline{FM} = \overline{KM} - \overline{KF},$$

und im Gegentheil

$$\overline{FM} = \overline{FK} - \overline{KM'}:$$

aber sollen diese wechselseitig inversen Quantitäten

verschwinden, um eine Gleichung zu erhalten, die die beyden Punkte M, M' ohne Veränderung der Zeichen giebt, so braucht man nur, wenn man

$$\overline{FM} = y$$
$$\overline{KM} = z$$

die Beständige $\overline{KF} = a$ nimmt,

in die Gleichung für den Punkt M auf die Axe $\overline{AB}$ bezogen, $z - a$ statt y zu setzen. Die Gleichung in z wird dann ohne irgend eine Veränderung der Zeichen sowohl dem Punkte M' als dem Punkte M gehören.

46. Weil die Formeln, die zwey indirekt correlativen Systemen eigen sind, sich nur durch die Zeichen der Quantitäten, aus denen diese Systeme bestehen, unterscheiden, so folgt, dass, wenn diese Formeln nur diese Quantitäten selbst zum Quadrat erhoben enthalten, die dem einen eigenen Formeln unmittelbar auf das andere anwendbar sind; man braucht nur das Zeichen der Quantitäten, die in diesem invers sind, zu verändern, aber die Veränderung des Zeichens der einfachen Grösse verändert nicht das Zeichen ihres Quadrats. Die Formel bleibt also dieselbe, d. h. sie ist so gut auf das umgeformte als auf das Ursystem unmittelbar anwendbar. So gehört die Gleichung

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2$$

dem vorher betrachteten Dreyeck, es mag nun D zwischen B und C, oder C zwischen B und D, oder endlich B zwischen C und D fallen.

47. Endlich jede Formel des Ursystems, die nur zwey Ausdrücke hat, ist auch auf jedes der Systeme anwendbar, die ihm direkt oder indirekt correlativ

ſind. In der That, wenn ſie es nicht wäre, müſste man, um ſie dahin zu bringen, das Zeichen der Quantitäten, die invers würden, verändern; aber die Formel würde ſich deswegen nicht verändern, weil, wenn einer der Ausdrücke negativ wird, der andere es auch werden muſs; denn ein poſitiver Werth kann nie einem negativen gleich ſeyn.

Z. B. wenn zwey gerade Linien $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ ſich in einem Cirkel im Punkte K ſchneiden (*Fig.* 6.), ſo hat man, wie man weiſs, die Gleichung

$$\overline{AK} \,.\, \overline{DK} = \overline{BK} \,.\, \overline{CK},$$

welche immer zwey Ausdrücke hat.

Wir wollen jetzt annehmen, daſs das Syſtem durch unmerkliche Grade ſich ſo verändere, daſs der Durchſchnittspunkt K auſserhalb der Fläche des Cirkels komme, und auf die Art das Syſtem ſo werde, wie es (*Fig.* 7.) vorgeſtellt iſt; dann hat man eben ſo im umgeformten Syſtem

$$\overline{AK} \,.\, \overline{DK} = \overline{BK} \,.\, \overline{CK}.$$

Dennoch iſt $\overline{CK}$ invers geworden, denn im erſten Syſtem hat man

$$\overline{CK} = \overline{CB} - \overline{BK}$$

und im zweyten im Gegentheil

$$\overline{CK} = \overline{BK} - \overline{CB},$$

folglich muſs $\overline{CK}$ das Zeichen wechſeln. Da aber von der andern Seite $\overline{DK}$ auch invers wird, weil man im erſten Fall

$$\overline{DK} = \overline{AD} - \overline{AK}$$

und im zweyten

$$\overline{DK} = \overline{AK} - \overline{AD}$$

hat; ſo folgt, daſs $\overline{DK}$ auch das Zeichen wechſeln

mufs, und dafs folglich die Endgleichung dieſelbe ſeyn mufs, wie damals, da der Durchſchnittspunkt *K* innerhalb des Cirkels war.

48. Nach dem, was (24) geſagt iſt, um zu beurtheilen, ob eine Quantität während der Veränderung des Syſtems direkt bleibt, oder invers wird, müſſen die beyden Quantitäten, *M*, *N*, deren Differenz ſie iſt, während dieſer Veränderung endlich bleiben, d. h. weder durch o noch durch ∞ gehen.

Wir wollen $M > N$ annehmen, und es ſey $M - N = P$; wir wollen ferner uns vorſtellen, dafs das Syſtem ſich verändere, ohne dafs *M* oder *N* durch o oder durch ∞ gehen, und dafs *M*, *m* werde; *N*, *n*; *P*, *p*, indem wir nur immer die abſoluten Werthe dieſer Quantitäten betrachten.

Noch mehr, wir wollen annehmen, dafs für dieſe Veränderung, *M* und *N*, die erſtere durch Abnehmen, die andere durch Wachſen angefangen haben, ſich eine der andern zu nähern bis zum Gleichwerden, dafs folglich ihr Unterſchied $P = 0$; dafs nachher, indem dieſe beyden Quantitäten fortfahren, die erſte abzunehmen, die andere zu wachſen, dieſe letzte, wenn ſie *n* geworden iſt, gröſser als *m* ſey (der Werth, den man vorausſetzt, dafs die andere ihn in derſelben Zeit angenommen habe), ſo wird ihr Unterſchied *p*, der im Urſyſtem *P* war, invers geworden ſeyn, und man hat folglich $p = n - m$ für $P = M - N$, was im Urſyſtem ſtatt hat.

Alſo wenn eine Quantität auf dieſe Art invers wird, ſo müſſen nothwendig die beyden Quantitäten,

deren Differenz ſie iſt, durch das Verhältniſs der Gleichheit gegangen ſeyn, und ſie ſelbſt durch o.

49. Aber die Quantität p kann auch auf eine andere, als die angezeigte Art, invers werden; wenn ſie nämlich, ſtatt durch o zu gehen, durch ∞ geht; dann können die beyden Quantitäten, deren Unterſchied ſie iſt, auch als durch das Verhältniſs der Gleichheit gegangen betrachtet werden, aber indem ſie beyde unendlich werden.

In der That, ich behaupte, daſs, wenn p invers geworden, $\frac{1}{p}$ es auch geworden iſt. Eben ſo deutlich wird in dem Augenblicke, wo $p = 0$, $\frac{1}{p} = \infty$. Man muſs alſo beweiſen, daſs, wenn M, m und N, n geworden iſt, $\frac{1}{p}$ eben ſo gut wie p invers wird.

Weil man $p = n - m$ hat, ſo hat man auch $\frac{1}{p} = \frac{1}{n-m} = \frac{n-m}{(n-m)^2} = \frac{n}{m^2 + n^2 - 2mn} - \frac{m}{m^2 + n^2 - 2mn}$, alſo (25) die Urgleichung, welcher dieſe entſpricht, muſs ſo ſeyn, daſs, wenn man in ihr für dieſe Quantitäten die ihnen entſprechenden ſetzt, und das Zeichen derer, die invers werden konnten, verändert, ſie mit der vorhergehenden übereinſtimmt. Aber nach der Hypotheſe ſind m und n nicht durch o oder durch ∞ gegangen, alſo direkt geblieben, und brauchen die Zeichen nicht zu ändern. p im Gegentheil iſt nach der Hypotheſe invers gewor-

den, sein Zeichen muss sich also verändert haben. Also müsste die Urgleichung

$$\frac{1}{P} = \frac{M}{M^2 + N^2 - 2MN} - \frac{N}{M^2 + N^2 - 2MN}$$

seyn; also ist $\frac{1}{p}$ im neuen Systeme die Differenz zweyer Quantitäten $\frac{n}{m^2 + n^2 - 2mn}$, $\frac{m}{m^2 + n^2 - 2mn}$, die ihre Ordnung verändert haben, d. h. deren kleinere im Ursysteme die grösere ist, und umgekehrt. Also ist $\frac{1}{p}$ invers geworden, d. h. überhaupt, wenn irgend eine Quantität invers wird, so wird die Einheit, durch diese Quantität selbst getheilt, auch eine inverse Quantität.

50. So sieht man, dass eine Quantität auf zwey verschiedene Arten invers werden kann, indem sie entweder durch 0, oder durch ∞ geht. Aber man darf nicht schliessen, dass, umgekehrt, jede Veränderliche, die durch 0 oder durch ∞ geht, deswegen nothwendigerweise invers wird; denn z. B. nimmt man an, dass p invers wird, so wird p^2 es darum nicht, ob es gleich augenscheinlich mit p zugleich durch 0 oder durch ∞ gegangen ist. In der That, wenn p^2 invers würde, würde es auch das Zeichen verändern, das geschieht aber nicht, wenn p es auch verändert, weil $(-p)^2$ immer p^2 ist. Also hat diese Quantität p^2 bey'm Durchgang durch 0 oder durch ∞ nicht das Zeichen verändert, und ist also auch nicht invers geworden.

51. Was die beständigen Grösen anbetrifft, d. h. diejenigen, die während der ganzen Veränderung

dieſelben bleiben, ſo kann man ſie betrachten, als wenn ſie einen Theil von jedem der correlativen Syſteme insbeſondere ausmachten; und weil ſie weder durch o noch durch ∞ gehen können, ſo iſt ihr Zeichen der Correlation mit dem Urſyſtem immer +.

52. Die Quantitäten, die das Urſyſtem ausmachen, ſind nur abſolute Quantitäten, und die Zeichen, die in den Ausdruck ihrer Verhältniſſe kommen, dienen nur immer ausführbare Verrichtungen anzuzeigen; alſo haben dieſe Quantitäten, um eigentlich zu reden, keine Zeichen der Correlation. Doch weil unter allen Syſtemen, die mit dieſem Urſyſtem in direkter Correlation ſtehen, das erſte in der Ordnung dieſs Urſyſtem ſelbſt iſt, ſo kann man jede der Quantitäten, die es ausmachen, als in direkter Correlation anſehen, und ihr folglich + als Zeichen der Correlation geben. So werde ich gewöhnlich verfahren.

53. Wenn man alle Syſteme, die unter einander correlativ ſind, als verſchiedene Zuſtände des Urſyſtems anſieht, das durch unmerkbare Stufen ſich verändert, ſo kann man die für dieſs Urſyſtem gefundenen Formeln als allen andern gehörig betrachten, indem man annimmt, daſs dann die zu ihnen gehörigen Quantitäten nicht mehr die Urquantitäten vorſtellen, ſondern daſs ſie nur in ihnen die correlativen Werthe ausdrücken, die ſie in dem Syſtem haben, auf das man ſie anwenden will. In dieſer Hinſicht werden dieſe Formeln allgemein; aber dann kann die Anwendung auf jeden einzelnen Fall nicht wirklich ausgeführt werden, als wenn man dieſe Subſtitution des

correlativen Werths für die abſolute im Urſyſtem entſprechende Quantität bewirkt. Man muſs alſo in jeder allgemeinen Formel die Buchſtaben oder ſonſtige Charaktere, die gebraucht ſind, um die Quantitäten auszudrücken, nicht als die Quantitäten ſelbſt, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, betrachten, ſondern als die correlativen Werthe derjenigen, die ihnen im beſondern Syſtem, auf das man die Anwendung der Formeln machen will, entſprechen.

54. Was ich bisher geſagt habe, betrifft nur den Fall, wo man annimmt, daſs die Umformung des Syſtems keine gröſsere Veränderung in den Zeichen der Formeln erfordert, die in der allgemeinen Tafel enthalten ſind, als die Verwandlung von + in — für die einfachen Quantitäten, die zur Zuſammenſetzung des Syſtems gehören. Jetzt wollen wir ſehen, was eintreten würde, wenn die Umformung ſo weit getrieben wäre, daſs, um die Formeln der allgemeinen Tafel mit dem neuen Zuſtande des Syſtems übereinſtimmend zu machen, man das Zeichen einer oder mehrerer dieſer Quantitäten eingebildet machen müſste.

Wir haben geſehen (24), daſs, wenn wir die Urquantitäten M, N in den Formeln laſſen, ſie ohne eine Veränderung der Zeichen auf alle mögliche Syſteme anwendbar bleiben, M mag gröſser als N ſeyn oder kleiner werden. Wir haben ferner geſehen, daſs, wenn wir ihren Unterſchied P nennen, die Formeln, ſo lange M gröſser als N bleibt, auch ohne eine Veränderung der Zeichen auf das umgeformte Syſtem anwendbar bleiben, aber daſs von dem Augenblicke,

wo M kleiner als N wird, oder dieſe Quantitäten zur inverſen Ordnung übergehen, man das Zeichen dieſer Differenz P verändern muſs, um die Formeln fortdauernd anwendbar auf das umgeformte Syſtem zu behalten.

Alſo wenn, ſtatt $M - N = P$, wir $M - N = P^2$ geſetzt hätten, ſo müſste man das Zeichen von P^2 verändern, um die Formeln des Urſyſtems für das umgeformte paſſend zu machen, d. h. man müſste in den Formeln des Urſyſtems $- P^2$ ſtatt $+ P^2$ ſetzen. Aber $- P^2$ ſtatt $+ P^2$ zu ſetzen, iſt eben ſo viel als $P \cdot \sqrt{-1}$ ſtatt P oder $P \cdot \sqrt{+1}$ zu ſetzen; alſo um die nöthige Veränderung zu bewirken, iſt es genug, P den Coefficienten oder vielmehr das Zeichen (6) $\sqrt{-1}$, ſtatt des Zeichens $\sqrt{+1}$, oder den natürlichen Coefficienten 1 zu geben; d. h. um dann die Correlation der Zeichen herzuſtellen, muſs man nicht mehr das Zeichen — als Zeichen der Correlation, der abſoluten Quantität P brauchen, ſondern das eingebildete Zeichen $\sqrt{-1}$.

Eben ſo hätte man $M - N = P^3$ ſetzen können; dann wäre P^3 in den Formeln des umgeformten Syſtems invers geworden, und man hätte ſein Zeichen von + in — im Urſyſteme verändern müſſen, um deſſen Formeln auf das umgeformte anwendbar zu machen. Da nun $-P^3$ eben ſo viel iſt als $(-P)^3$ oder $\left(\frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} P\right)^3$, ſo folgt, daſs, um die Formeln des Urſyſtems paſſend auf das umgeformte zu machen, man nur ſtatt des Zeichens + des abſoluten

Werthes

Werthes P eins von diesen drey Zeichen zu setzen braucht:

$$-1, \quad \frac{1+\sqrt{-3}}{2}, \quad \frac{1-\sqrt{-3}}{2},$$

welches die drey cubischen Wurzeln der Einheit negativ genommen sind.

Man sieht leicht, was zu thun wäre, wenn man $M - N = P^4$, oder $M - N = P^5$ u. s. w. machte, und daſs folglich, um die Formeln des Ursystems auf das umgeformte System anwendbar zu machen, man genöthigt werden kann, das Zeichen einiger oder aller Quantitäten, nicht von $+$ in $-$, sondern von $+$ in $\sqrt{-1}$ oder ein anderes eingebildetes Zeichen zu verändern.

55. Man kann die Umformung noch weiter treiben; denn, statt $M - N = P$, oder P^2, oder P^3 u. s. w. anzunehmen, kann man es z. B. $= P - Q$, oder $P - Q^2$, oder $P - Q^2 + R^2$ u. s. w. setzen. Aus diesen Substitutionen für $M - N$ im Ursystem würden für das umgeformte System, wenn $M = N$, zahlreiche Veränderungen der Zeichen entstehen; denn dann wären es die Zeichen der Funktionen $(P - Q)$, $(P - Q^2)$ u. s. w., die man negativ machen müſste, d. h. man müſste nicht mehr die Zeichen einfacher Quantitäten im Ursystem von $+$ in $-$ verändern, um die Correlation festzustellen, oder um die Formeln dieses Ursystems identisch mit denen für das umgeformte zu machen, auch nicht die Zeichen irgend einer Potenz dieser Quantitäten, sondern man müſste so die Zeichen irgend einer mehr oder weniger zusammengesetzten Funktion dieser Quantitäten verän-

dern, indem man ſie entweder allein nähme, oder unter einander verbände. Deswegen nenne ich dieſe Gattung der Correlation complexe Correlation.

56. Ohnerachtet aller dieſer Subſtitutionen bleiben die Formeln des veränderlichen Syſtems, in ſeinen verſchiedenen Zuſtänden betrachtet, doch immer dieſelben bis auf die Zeichen, die für jede der Quantitäten bald negativ, bald eingebildet von höherm oder niedrigerm Grade werden; und da es leicht zu ſehen iſt, daſs durch eine Reihe von Umformungen man nicht allein die Wurzelzeichen einer Formel oder Gleichung, ſondern auch alle negativen Ausdrücke verſchwinden laſſen kann, ſo folgt, daſs alle ſich entſprechende Formeln mehrerer correlativen Syſteme (ſey dieſe Correlation direkt, indirekt, eingebildet oder complex) auf eine und dieſelbe Formel zurückgeführt werden können, welche allen Syſtemen gehört, und die ihre gemeinſchaftlichen Eigenſchaften ausdrücken wird.

Daher folgt auch, daſs, wenn man Formeln hat, die auf irgend ein Syſtem von Quantitäten anwendbar ſind, man Formeln für alle möglichen correlativen Syſteme erhalten kann, indem man die Zeichen der dahin gehörigen Quantitäten auf alle mögliche Art verändert, wo man unter dem Namen Zeichen alle möglichen theils wirklichen, theils eingebildeten Wurzeln der Einheit umfaſst.

57. Nach dem, was vorher (54) geſagt iſt, ſieht man, daſs die eingebildeten Wurzeln einer Gleichung noch weit mehr entfernt ſind, die wahre Auflöſung

irgend einer Aufgabe zu geben, als die blofs negativen Wurzeln; und dafs fie noch härtere Unverträglichkeiten zwifchen den vorgefetzten Bedingungen und den Hypothefen, auf welche die Betrachtung gegründet ift, ankündigen. Aber verändert man das Zeichen der negativen Wurzeln, und nimmt mit den gegebenen Gröfsen der Aufgabe oder den Hypothefen, auf welche man die Betrachtung gründete, Modifikationen vor, welche diefe Gegebenen und diefe Hypothefen mit den in ihren Zeichen fo veränderten Gleichungen in Uebereinftimmung bringen; nimmt man ferner zugleich, wenn man diefs bey den Gegebenen und den Hypothefen thut, auf denen die Anfetzung der Gleichung beruhte, mehr oder minder merkbare Modifikationen, mit den Zeichen, die in die eingebildeten Wurzeln der Unbekannten gehören, vor, fo kann man dadurch die einen unmittelbar anwendbar auf die andern machen. Der Unterfchied befteht nur darin, dafs die Modifikationen beträchtlicher werden, und dafs die Analogie des correlativem Syftems mit dem Urfyftem gewöhnlich fchwerer aufzufaffen ift.

58. Wir wollen als ein Beyfpiel diefe Frage aufftellen: eine gerade Linie $\overline{AB}$ ift gegeben (*Fig.* 8.), auf diefer geraden Linie einen Punkt K zu finden, fo dafs das Produkt der beyden Segmente $\overline{AK}$, $\overline{BK}$ einer gegebenen Quantität gleich fey: z. B. $= \frac{1}{2}\overline{AB}^2$.

Da ich noch nicht weifs, ob der Punkt K fich auf der geraden Linie $\overline{AB}$ felbft oder auf ihrer Verlängerung finden foll, fo fange ich erft meine Rechnung unter der Vorausfetzung an, dafs er fich auf ihr befinde, d. h. dafs K zwifchen A und B falle.

Dieſs feſtgeſetzt nehme ich $\overline{AK}$ als die Unbekannte $= x$, die Linie $\overline{AB} = a$. Die Bedingungen der Aufgabe geben mir dann

$$x(a - x) = \tfrac{1}{2}a^2 \text{ oder}$$

$$x^2 - ax + \tfrac{1}{2}a^2 = 0, \text{ woraus ich}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{-\tfrac{1}{4}a^2} \text{ ziehe,}$$ d. h. x iſt eingebildet.

Daraus ſchlieſse ich nicht, daſs die Auflöſung der aufgeſtellten Aufgabe unmöglich ſey, ſondern bloſs, daſs ſie es nach der Vorausſetzung iſt, die ich gemacht habe, nämlich daſs der Punkt K zwiſchen A und B liege, d. h. die Aufgabe kann nicht richtig in Gleichung geſetzt ſeyn, weil ich meine Betrachtungen auf Figuren gegründet habe, die nicht die waren, die ich betrachten ſollte, oder die nicht den Bedingungen der Aufgabe Genüge leiſten konnten. Ich fange alſo von neuem meine Betrachtungen an, indem ich von einer andern Hypotheſe ausgehe, d. h. ich nehme den geſuchten Punkt nicht auf $\overline{AB}$, wie ich vorher that, ſondern auf einer von ihren Verlängerungen, z. B. in K'.

Dann giebt die Bedingung der Aufgabe mir

$$x \cdot (x - a) = \tfrac{1}{2}a^2 \text{ oder}$$

$$x^2 - ax - \tfrac{1}{2}a^2 = 0, \text{ woraus ich}$$

$$x = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} \text{ ziehe,}$$

eine Gleichung, die, weil ſie keine eingebildete Quantitäten mehr enthält, die Frage auflöſt.

Dieſe Auflöſung iſt doppelt; die eine

$$x = \tfrac{1}{2}a + \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2}$$

iſt poſitiv, und löſt ohne Schwierigkeit die Aufgabe nach meiner neuen Hypotheſe auf, d. h. wenn man

annimmt, dafs der gefuchte Punkt auf der Verlängerung von $\overline{AB}$ jenfeits des Punktes B ift, oder dafs der Punkt B fich zwifchen A und dem gefuchten Punkte befindet. Aber die andere Auflöfung

$$x = \tfrac{1}{2} - \sqrt{\tfrac{3}{4} a^2}$$

kann fich als negativ nicht auf diefelbe Hypothefe beziehen, und nach dem, was (37) gefagt ift, mufs man, um zu erfahren, was fie bedeutet, ihr Zeichen verändern, und fehen, welchem correlativen Syfteme die fo modificirte Gleichung Genüge leiften könne. Das Refultat diefer Veränderung ift, dafs die Gleichung $x(x - a) = \frac{1}{2} a^2$, welche die Bedingung der Aufgabe ausdrückt,

$$x \,.\, (x + a) = \tfrac{1}{2} a^2$$

wird. Wir wollen alfo fehen, welchem neuen correlativen Syfteme diefer neue Ausdruck der Bedingungen der Aufgabe Genüge leiften kann.

Diefs gefchieht nun, wie man leicht fieht, wenn man annimmt, dafs der Punkt K auf die Verlängerung von AB nicht wie vorher auf die Seite von B, fondern auf die Seite von A in K falle. Und wirklich, geht man von diefer neuen Hypothefe aus, fo ift

$$x = \overline{AK''}$$
$$x + a = \overline{BK''}.$$

Daraus folgt, dafs die Bedingung der Aufgabe $x \,.\, (x + a) = \frac{1}{2} a^2$ ift, welche Gleichung

$$x = -\tfrac{1}{2} a \pm \sqrt{\tfrac{3}{4} a^2}$$

geben wird, deren pofitive Wurzel in der That diefelbe ift, die fich bey der vorigen Hypothefe negativ dargeftellt hatte.

59. Man ſieht, daſs das eingebildete Zeichen, welches die Wurzel der Gleichung afficirt, eben ſo wenig, wie das bloſs negative Zeichen, eine Unmöglichkeit, die Aufgabe aufzulöſen, ankündigt, ſondern nur auf eine Unmöglichkeit hinzeigt, die Bedingungen dieſer Aufgabe mit den Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, zu vereinigen, und daſs es in beyden Fällen, nur auf eine Art, die leichter oder ſchwieriger aufzufaſſen iſt, die Modifikationen anzeigt, die man mit der einen oder der andern vornehmen muſs, um die Auflöſung möglich zu machen. Die Gleichung iſt die genaue Ueberſetzung der aufgeſtellten Bedingungen, vereinigt mit den Hypotheſen, auf welche man die Betrachtung gegründet hat; ſie wird ungereimt, ſo wie dieſe nicht vereinigt werden können, und dann muſs man nothwendigerweiſe die Vorausſetzungen modificiren, von denen man ausging, um zu einer wirklichen Auflöſung zu kommen. Dieſe Modifikationen zeigen ſich in der Gleichung, welche, da ſie die Ueberſetzung von Verhältniſſen wird, zwiſchen denen keine Unverträglichkeit mehr beſteht, ſelbſt nur mögliche Reſultate, wirkliche Quantitäten und ausführbare Verrichtungen anzeigt.

Es iſt auch möglich, daſs die aufgeſtellten Bedingungen in ſich ſelbſt unmöglich ſind, daſs ſie Widerſprüche einſchlieſsen, denn von welcher Hypotheſe man auch ausgeht, kommt man ſtets auf ungereimte Reſultate. Aber die Natur ſelbſt der Zeichen, ſie mögen negativ oder eingebildet ſeyn, die in dieſs Reſultat kommen, zeigen die Modifikationen an, die

man mit diesen Bedingungen selbst vornehmen muss, um die Aufgabe möglich zu machen.

Da die Unverträglichkeit der aufgestellten Bedingungen unter sich oder auf den Hypothesen, auf welche man die Betrachtung gründet, das ist, was die Auflösung einer Aufgabe unmöglich macht, so begreift man leicht, dass die Aufgabe dann zu bestimmt wird, und dass sich Bedingungen finden, die, da sie mit den andern unverträglich sind, durch ihre Unterdrückung die Aufgabe möglich machen würden. Ich will so viel sagen, man hat die Rechnung auf zu beschränkten Grundlagen geführt, und man muss die Frage, so wie sie aufgelöst worden ist, nur als eine theilweise Frage betrachten, deren wirkliche und positive Wurzeln bloss die wahre Auflösung geben, aber deren negative und eingebildete Wurzeln andere theilweise Fragen anzeigen, die mehr oder minder Analogie mit der ersten haben. Diese könnten mit jenen in einen allgemeinen Ausdruck vereinigt werden, auf der die Gleichung, die man dann fände, stets unmittelbar anwendbar seyn würde, und ohne einige Modifikationen in den Zeichen. Diess hat man schon (37) für den Fall gesehen, wenn die Wurzeln bloss negativ sind, und das kann man für eingebildete Wurzeln an dem eben gegebenen Beyspiel sehen.

In der That, die Aufgabe ist gleich anfangs unter der Hypothese in Gleichung gesetzt, dass der gesuchte Punkt K zwischen A und B liege; da diese Hypothese nun mit den Bedingungen der Aufgabe unverträglich ist, so fand man natürlicherweise die Wurzeln ungereimt. Aber nach der Form dieser Wurzeln

konnte man die Modifikation beurtheilen, die man mit dieſer Hypotheſe vornehmen muſste; folglich ward ſie in der That modificirt, indem man annahm, daſs der geſuchte Punkt ſich rechts vom Punkte B finden müſſe. Da dieſe meine Vorausſetzung mit den Bedingungen übereinſtimmen konnte, ſo muſste man eine mögliche Auflöſung finden, d. h. eine wirkliche und poſitive Wurzel für die Unbekannte, und dieſe fand man. Aber zugleich war eine zweyte ungereimte Wurzel da, und dieſe zeigte uns, daſs die Hypotheſe, von der man zuletzt ausging, wenn gleich richtig, doch zu eingeſchränkt war, um den aufgeſtellten Bedingungen in ihrem ganzen Umfange Genüge zu leiſten, und zugleich gab ſie durch ihre Form die neue Modifikation zu erkennen, deren ſie fähig war. Dieſe Modifikation beſtand darin, den geſuchten Punkt bereits von A anzunehmen, und dieſe letzte Vorausſetzung gab in der That eine neue Auflöſung.

Man hätte alſo zugleich beyde Auflöſungen haben können, deren die Aufgabe fähig war, wenn man die Rechnung auf eine allgemeinere Hypotheſe gegründet hätte.

Statt als Unbekannte x die Entfernung des Punktes A vom geſuchten Punkte zu nehmen, wollen wir in F einen neuen Punkt annehmen, der von A um die willkührliche Quantität g entfernt iſt, die aber doch gröſser als der vorher gefundene Werth für $\overline{AK''}$ ſeyn muſs, die neue Unbekannte ſey die Entfernung des Punktes F vom geſuchten Punkte. Hier iſt es deutlich, daſs, wenn man die neue Un-

bekannte y nennt, man für den Punkt K', der die erste Auflösung giebt, $x = y - g$ haben wird; also braucht man nur diesen Werth von x in die vorher gefundene Gleichung zu setzen (58), um die zu erhalten, die $\overline{FK'}$ oder y giebt. Nun wird die Gleichung so

$$y - g = \tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2} \text{ oder}$$

$$y = g + \tfrac{1}{2}a(1 \pm \sqrt{3}).$$

$\overline{FK'}$ ist also eine von den beyden Wurzeln. Aber da K'' sich nach der Hypothese eben sowohl rechts von F befindet als K', so ist gar kein Grund vorhanden, warum mir die Gleichung eher eine von den Auflösungen geben sollte, deren die Aufgabe fähig ist, als die andere. Weil die Betrachtungen, um die Gleichung zu finden, in beyden Fällen durchaus dieselben seyn müssen; also ist die zweyte Wurzel $\overline{FK''}$; also giebt dieselbe Hypothese mir dann die beyden gesuchten Auflösungen, weil ich ihr eine hinreichende Ausdehnung gegeben habe, um in den beyden Fällen den aufgestellten Bedingungen zu entsprechen.

Ich wäre zu demselben Resultat gekommen, wenn ich statt $\overline{FK'}$, $\overline{FK''}$ gesucht hätte; denn, wenn ich, wie im ersten Fall, y die Entfernung des festen Punktes F vom gesuchten Punkte, und x die Entfernung des Punktes A von eben demselben Punkte nenne, so würde man

$$x = g - y$$

haben, was in die Gleichung $x = -\tfrac{1}{2}a \pm \sqrt{\tfrac{3}{4}a^2}$ gesetzt, die dem Fall entspricht, wenn man den gesuchten Punkt links von A annimmt,

$$g - y = -\tfrac{1}{2}a \pm \tfrac{3}{4}a^2 \text{ giebt, oder}$$
$$y = g + \tfrac{1}{2}a\,(1 \pm \sqrt{3}) \text{ wie vorher.}$$

60. Das vorige Beyſpiel zeigt, was den Unterſchied zwiſchen poſitiven, negativen und eingebildeten Wurzeln ausmacht. Die erſten allein löſen die Frage unmittelbar auf, ohne daſs man einige Modifikation, weder mit den Bedingungen der Aufgabe, noch mit den Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, noch mit den Gleichungen, die zugleich Bedingungen und Hypotheſen ausdrücken, vorzunehmen habe. Damit die zweyten die Frage auflöſen, muſs man ihr Zeichen verändern und zu gleicher Zeit theils mit den Bedingungen, theils mit den Hypotheſen, auf welche das Raiſonnement gegründet iſt, paſſende Modifikationen vornehmen; ſo, daſs die ſo modificirten Gleichungen hievon die genaue Ueberſetzung ſeyen. Endlich damit die eingebildeten Wurzeln auch die Frage auflöſen, iſt es nicht hinreichend, das Zeichen der Unbekannten von + in — in der Gleichung zu verändern, ſondern man muſs es von + in ein eingebildetes Zeichen verändern, und dann ſuchen, welches neue Syſtem dieſer Verwandelung entſprechen könne. Oder vielmehr man muſs nicht hier das Zeichen der Unbekannten ſelbſt verändern, ſondern das Zeichen einer Potenz oder einer mehr oder minder zuſammengeſetzten Funktion eben dieſer Unbekannten.

In dem vorher behandelten Fall z. B. iſt es nicht x, ſondern x^2, was das Zeichen verändern muſs, damit die Gleichung

$$x \,.\, (x + a) = \tfrac{1}{2}a^2$$

werde, wie ſie ſeyn muſs, um die zweyte Auflöſung zu erhalten, ſtatt

$$x \,.\, (a - x) = \tfrac{1}{2} a^2$$

wie man erſt annahm. Iſt dieſe Veränderung gemacht, ſo muſs man die Modifikation ſuchen, welche man zu gleicher Zeit mit dem Syſteme, auf dem die Betrachtung erſt beruhte, vorzunehmen hat, damit es zu dieſer Veränderung der Gleichung paſſe. Dieſe Modifikation beſteht nun darin, den geſuchten Punkt links von A anzunehmen. Für die erſte Auflöſung muſs man weder von x, noch von ſeiner Potenz x^2, ſondern von der Funktion $(a - x)$ das Zeichen verändern, damit die gleich anfangs gefundene Gleichung $x\,(a - x) = \frac{1}{2} a^2$ paſſend werde, um wirklich die Bedingungen der Aufgabe auszudrücken, und dann muſs man, wie vorher, die Modifikation ſuchen, die man zu gleicher Zeit mit dem Syſtem, auf dem die Betrachtung beruht, vorzunehmen hat, damit es zu der in der Gleichung vorgenommenen Veränderung paſſen könne. Dieſe Modifikation beſteht darin, den geſuchten Punkt rechts von B anzunehmen.

61. Einer der hauptſächlichſten Sätze jener Lehre, die ich ſchon (39 u. fgg.) zu widerlegen geſucht habe, beſteht in der Behauptung, daſs die Rechnung ſelbſt den Fehler verbeſſere, den man beym Ausdruck der Bedingungen einer Aufgabe begangen haben könnte, wenn man z. B. irrig einen geſuchten Punkt auf einer gegebenen Linie rechts von einem gegebenen Punkte annimmt, der als links liegen ſoll. Nach dieſer Lehre, wenn man als Unbekannte die Entfernung des geſuchten Punktes vom gegebenen Punkte an-

nimmt, muſs man dann für dieſe Unbekannte ihren Werth ſelbſt bloſs mit entgegengeſetztem Zeichen finden; daſs man alſo nur dieſen Werth nach einer Richtung, die der angenommenen entgegengeſetzt iſt, zu tragen braucht, um den wahren geſuchten Punkt zu erhalten.

Daraus würde folgen, daſs, weil der Punkt K'' wirklich der Frage Genüge leiſtet, und $\overline{AK''} = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$, man, wie man den Irrthum beging, den geſuchten Punkt rechts von A in K anzunehmen, für $\overline{AK}$ denſelben Werth nur negativ hätte finden müſſen. Das iſt aber nicht der Fall (58), weil man nach dieſer falſchen Vorausſetzung für $\overline{AK}$ einen eingebildeten Werth findet. Die Rechnung berichtigt alſo nicht immer den Irrthum, den man bey der Stellung eines geſuchten Punktes begangen haben könnte. Sie verbeſſert ihn nur, wenn die beyden verglichenen Syſteme bloſs in inverſer Correlation ſind, wie wir (43) annahmen, und nicht, wenn ſie in eingebildeter oder complexer Correlation, wie im gegenwärtigen Falle, ſind.

62. Aus dem Vorigen folgt, daſs man jedesmal, wenn der Ausdruck der Bedingungen einer Aufgabe nur zu Wurzeln führt, die nicht wirklich und poſitiv ſind, ſchlieſsen kann, daſs die Hypotheſen, auf denen die Betrachtung beruhte, nicht mit den Bedingungen der Aufgabe übereinſtimmen, daſs es ferner unmöglich ſey, dieſen Bedingungen Genüge zu leiſten, ohne die Hypotheſen zu ändern, oder ſich an die Hypotheſen zu halten, ohne die Bedingungen zu ändern. In allen Fällen werden die Gleichungen, die zugleich

Bedingungen und Hypothefen ausdrücken, nothwendig negative oder eingebildete Refultate geben müffen, wenn die einen nicht mit den andern übereinftimmen können. Damit fie nur bedeutende Refultate uns darbieten, mufs man alfo nothwendigerweife dahin gelangen, die Hypothefen, auf denen die Betrachtung beruht, mit den Bedingungen der Aufgabe zu vereinigen. Welche nun auch immer die Modifikationen feyn mögen, die man mit den einen oder den andern vornehmen mufs, fo werden die Gleichungen, die immer nur die Ueberfetzung beyder zufammengenommen find, nothwendigerweife von ihrer Seite analoge, mehr oder minder merkbare Modifikationen erleiden, nachdem die Veränderungen, die man mit den Bedingungen oder Hypothefen vorgenommen hat, mehr oder minder beträchtlich find.

Noch mehr, eine pofitive und wirkliche Wurzel, wo die Gleichung genau Bedingungen und Hypothefen in Uebereinftimmung ausdrückt, giebt nicht immer eine wahre Auflöfung. Denn es ift nicht genug, dafs Bedingungen und Hypothefen übereinftimmen und die allgemeine Gleichung beyden genug thue, fondern die Wurzel, die man zur Auflöfung anwenden will, mufs noch befonders diefen Bedingungen und diefen Hypothefen genug thun. Damit die allgemeine Gleichung ihnen Genüge leifte, ift es hinlänglich, wenn nur eine von ihren Wurzeln es auch thut; aber wenn die algebraifchen Umformungen mit diefer Wurzel eine andere Wurzel, die nicht Genüge leiftet, verfchmolzen haben, fo wird diefe keine wahre Auflöfung geben, fie kann nur, wie die negativen und eingebildeten

Wurzeln, eine Frage, die mit der erstern analog ist, anzeigen, und deren Auflösung geben; aber der Frage, so wie sie aufgestellt ist, leistet sie keine Genüge.

Man kann die Frage aufwerfen: ob es möglich sey, daſs algebraische Umformungen mit den eigentlichen Wurzeln andere verschmelzen können, die nicht die eigentlichen Wurzeln, aber doch wirklich und positiv sind. Man kann viele Beyspiele anführen, hier nur ein sehr einfaches, das ich aus Bossüt's Geometrie nehme, dem diese Bemerkung nicht entgangen ist.

(Siehe seine *Application de l'Algèbre à la Géometrie*, *No.* 23. der Ausgabe vom Jahre *VIII.*)

Dasselbe Beyspiel findet sich auch in Newton's *Arithmetica universalis.*

Wir wollen annehmen, daſs *ABC* (*Fig.* 1.) ein rechtwinklichtes Dreyeck sey, in welchem man die Hypothenuse $\overline{BC}$ und die Summe $\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{AD}$ der Catheten und des Perpendikels weiſs, man will den Werth dieses Perpendikels wissen.

Wir wollen

$$\overline{BC} = a$$

$$AB + \overline{AC} + \overline{AD} = b$$

den gesuchten Perpendikel $= x$

die unbekannte Seite $\overline{AB} = y$ nennen.

Das rechtwinklichte Dreyeck *ABC* giebt

$$a^2 = y^2 + (b - x - y)^2 \text{ oder}$$

$$a^2 = 2y^2 + b^2 - 2bx + x^2 - 2by + 2xy \; (A).$$

Weil $\triangle BAC \backsim \triangle ADC$

$$a : y = b - x - y : x \text{ oder}$$

$$ax = by - xy - y^2 \quad (B).$$

Vergleicht man die Gleichungen in A und B, um y wegzuſchaffen, und löſt die Gleichung in x, die vom zweyten Grade iſt, auf, ſo erhält man

$$x = a + b \pm \sqrt{(2a^2 + 2ab)}.$$

Hier ſind zwey Werthe für x, d. h. für den geſuchten Perpendikel $\overline{AD}$ beyde poſitiv. Die erſte von dieſen Auflöſungen iſt aber offenbar falſch, weil es ſichtbar unmöglich iſt, daſs den Perpendikel $x > a + b$.

Alſo reicht es nicht für die Wurzel einer Gleichung hin, daſs ſie wirklich und ſelbſt poſitiv ſey, um die Auflöſung einer Aufgabe zu geben, deren Bedingungen ſie ausdrückt. Dieſe Wurzel muſs auch noch zugleich mit dieſen Bedingungen und den Hypotheſen, auf denen die Betrachtung beruht, übereinſtimmen.

Aus allem Vorhergeſagten können wir allgemein folgern:

1) Damit die Auflöſung einer gegebenen Aufgabe durch irgend eine Wurzel einer Gleichung in der That ſtatt finde, müſſen die vorgeſtellten Bedingungen die Hypotheſen, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, und die Conſtruktionen oder ſonſtigen Verrichtungen, welche die Wurzel dieſer Gleichung anzeigt, alle in Uebereinſtimmung ſeyn.

2) Besteht irgend eine Unverträglichkeit zwischen den einen oder den andern, so muss man diese Wurzel nur als eine blosse Hindeutung auf eine andere mit der ersten analoge Frage betrachten, und um ihre wahre Bedeutung zu haben, muss man die Rechnung mit anderen Bedingungen oder anderen Hypothesen wieder anfangen, bis sie alle sowohl unter sich, als mit den Verrichtungen übereinstimmend sind, welche die Wurzel der Gleichung, die auch nach diesen Veränderungen modificirt ist, anzeigen könnte.

3) Die negativen und eingebildeten Wurzeln sind nie wahre Auflösungen der vorgestellten Frage, sondern blosse Anzeigen anderer Fragen, die mehr oder weniger von den ersten unterschieden sind. Oft sind sie blosse algebraische Formen, durchaus unbedeutend, welche die algebraischen Umformungen mit den wirklichen Wurzeln verschmolzen haben.

4) Wirkliche und positive Wurzeln drükken eben so wenig die eigentlichen Auflösungen aus, als negative oder eingebildete, und sind, wie sie, nur blosse Anzeigen analoger Fragen, wenn die Konstruktionen oder sonstigen Verrichtungen, zu denen sie leiten, nicht

ganz

ganz mit den vorgestellten Bedingungen und den Hypothesen, auf denen die Betrachtung beruhte, in Uebereinstimmung sind.

5) Keine Gleichung oder Wurzel einer Gleichung kann die eigentliche Auflösung geben, so lange sie ungereimte Quantitäten oder nicht ausführbare Verrichtungen enthält; ausgenommen, wenn sie sich wechselseitig zerstören, wie es bey den wirklichen Wurzeln der Gleichungen vom dritten Grade geschieht.

6) Diese unverständlichen Formen müssen doch nicht vernaclässigt werden. Man kann sie als wirkliche Formen gebrauchen, weil man sie durch bloſse algebraische Umformungen verschwinden lassen kann, und dann nur applicirte und auf den vorgestellten Gegenstand unmittelbar anwendbare Formeln zurückbleiben. Doch müssen, wie vorher bemerkt ist, diese Formeln, die vorgestellten Bedingungen und die Hypothesen, auf denen die Betrachtung beruhte, alle unter einander in Uebereinstimmung seyn.

63. So lange man nicht aus der Synthesis herausgeht, d. h. so lange man die Zeichen + und — in einer Rechnung nur braucht, um ausführbare Verrichtungen anzuzeigen, ist es ganz unmöglich, daſs

man auf eingebildete oder negative allein ſtehende Quantitäten ſtoſse. Dieſe erſcheinen nur, wenn man ſich von der ſynthetiſchen Methode entfernt, indem man die Zeichen braucht, um unausführbare Verrichtungen anzuzeigen, oder wenn man die Reſultate, zu denen man durch Syntheſis gelangen konnte, auf Hypotheſen anwenden will, die nicht mit den urſprünglich durch dieſe Reſultate ausgedrückten Bedingungen übereinſtimmen. Die negativen Werthe entſtehen daher, weil, um die angezeigten Verrichtungen auszuführen, man eine wirkliche Quantität von o abziehen müſste, oder überhaupt irgend eine Quantität von einer kleineren Quantität; und die eingebildeten, weil man mit dieſen erſten ſchon unmöglichen Reſultaten neue Verrichtungen vornehmen will. Man kann alſo dieſe Gleichungen oder Formeln, die negative oder eingebildete Quantitäten enthalten, als aus andern urſprünglich möglichen Formeln abgeleitet betrachten, weil die Quantitäten, die abgezogen werden ſollen, darin kleiner waren, als die Quantitäten, von denen ſie abgezogen werden ſollten, und die nachher unmöglich geworden ſind, kraft einer Veränderung der Ordnung, die durch eine ſtufenweiſe Verwandelung unter den Quantitäten bewirkt wurde. Geht man von da aus, ſo ſieht man, wie nach der Reihe dieſe Werthe entſtehen, und da unter allen bekannten Verrichtungen der Algebra nur eine iſt, durch die dieſe eingebildeten Gröſsen entſtehen, nämlich die Ausziehung der Quadratwurzel, da ferner dieſe Verrichtung immer die beyden Zeichen + und — vor der Wurzelgröſse ſetzt, ſo ahndet man leicht,

dafs alle möglichen eingebildeten Werthe auf diese Formen zu bringen sind:

$$\pm \sqrt{-B} \text{ oder } \pm B\sqrt{-1}.$$

Und alle Werthe, die theils wirklich, theils eingebildet sind, auf die Form:

$$A \pm B\sqrt{-1};$$

dafs ferner diese Werthe nur zwey und zwey entstehen können; und dafs folglich jede eingebildete Wurzel in einer Gleichung nothwendig von einer andern begleitet ist, die von ihr durch das Zeichen der Wurzelgröfse unterschieden ist, welche das eingebildete ausdrückt. Da aber die gröfsten Mathematiker sich mit diesen wichtigen Wahrheiten beschäftigt und sie nach der Strenge erwiesen haben, so könnte ich auf jeden Fall nur das, was sie in dieser Rücksicht gesagt haben, wiederholen.

64. In der Synthesis giebt es keine zwey Arten, die Wurzel aus einer gegebenen Quantität zu ziehen; die Analysis hat so viel verschiedene Arten, als Einheiten im Exponenten der Wurzelgröfse sind. Aber was sind alle diese Wurzeln, ausgenommen die, welche die Synthesis giebt, anders, als algebraische Formen, unverständlich in ihrem jetzigen Zustande, und die nur durch Umformungen nützlich werden können. Man kann unmöglich auf eine genugthuende Art beweisen, dafs $(-a)^2 = a^2$, wenn $-a$ nicht auf eine absolute gröfsere Quantität folgt; alle Betrachtungen, durch welche man diefs Princip für andere Fälle begründen wollte, würden fehlerhaft seyn, denn um zu beweisen, dafs $(-a)^2 = a^2$, mufs man erst sagen, was $-a$ allein ist. Das kann man

aber nicht, weil $-a$ bloſs ein eingebildetes Weſen iſt. Wahr und eines Beweiſes fähig iſt bloſs, daſs die Vorausſetzung $(-a)^2 = a^2$ in einer Rechnung nicht zu falſchen Reſultaten führen kann, wenn man nämlich durch Umformungen dahin gelangen kann, das, was unverſtändlich in den Ausdrücken iſt, verſchwinden zu laſſen. Es iſt beynahe hier derſelbe Fall, wie in der Rechnung des Unendlichen, wenn man die Differentiale als wahre Quantitäten betrachtet. In dieſer gelangt man zu genauen Reſultaten, indem man die Irrthümer compenſirt; in der Lehre von negativen und eingebildeten Werthen ſind keine Irrthümer in den Gleichungen, ſondern bloſs unverſtändliche Formen, die ſich wechſelſeitig wegſchaffen, und ſo genaue Reſultate, die wirklicher Anwendung fähig ſind, hervorbringen.

65. Man forme eine Gleichung, die poſitive, negative und eingebildete Wurzeln enthält, auf irgend eine Art um, indem man immer dieſelbe Unbekannte beybehält. Weil es nur wirklich, gewiſs beſtimmte Arten, die vorgeſtellte Frage aufzulöſen, giebt, wird man nie ſo die wirklichen und poſitiven Wurzeln, die wahrhaftig und ganz auf die Frage anwendbar ſind, vermehren, vermindern, oder verändern können. Dieſe wirklichen und poſitiven Werthe, die ganz der Frage Genüge leiſten, und die einmal für die unbekannte geſetzt, die Gleichung auf $0 = 0$ bringen, werden ſie immer in allen andern möglichen Formen auch auf $0 = 0$ bringen.

Dieſs iſt nicht der Fall mit negativen und eingebildeten Wurzeln, auch nicht mit denen, die die Frage

nicht vollſtändig auflöſen (63). Eine Umformung, die man mit einer Gleichung vornimmt, kann eine unendliche Anzahl dieſer neuen Wurzeln entſtehen oder verſchwinden laſſen, weil die erſten, die feſt mit der Frage verbunden und die einzigen ſind, die ſie wahrhaftig auflöſen, nie herausgeſchafft werden können, indeſs man die andern, da ſie nur mit der Hauptfrage andere acceſſoriſche Zuſammenſtellungen vermengen, auf verſchiedene Arten verändern oder herausſchaffen kann.

Wir wollen z. B. die Gleichung $x = a$ nehmen; erheben wir ſie zum Quadrate, ſo haben wir $x^2 - a^2 = 0$. Durch dieſe leichte Umformung entſteht eine negative Wurzel, die vorher nicht da war, nämlich

$$x = -a,$$

aber die poſitive Wurzel $x = a$ hat ſich nicht verändert. Ich quadrire nochmals $x^2 = a^2$, ſo erhalte ich $x^4 = a^4$ oder $x^4 - a^4 = 0$, eine neue Umformung, aus der zwey eingebildete Wurzeln entſtehen, die vorher nicht da waren, nämlich

$$x + \sqrt{-a} = 0$$
$$x - \sqrt{-a} = 0,$$

ohne irgend etwas an der wirklichen und poſitiven Wurzel $x = a$ zu ändern, die unveränderlich bleibt. Man ſieht alſo, wie bloſse Umformungen mit den Wurzeln, welche die wahre Auflöſung einer vorgeſtellten Frage geben, algebraiſche Formen verſchmelzen können, die an ſich unbedeutend ſind.

Weil die wirklichen und poſitiven Wurzeln, die allein die wahre Auflöſung einer Frage geben, unver-

änderlich ſind, welche Umformungen man auch immer mit den Gleichungen vornimmt, ſo ſieht man, daſs, wenn man ſelbſt dieſe Gleichungen durch eingebildete Formen gehen lieſse, vorausgeſetzt, daſs man ſie endlich auf poſitive und wirkliche Formen zurückführte, d. h. die keine ungereimte Quantitäten oder unausführbare Verrichtungen enthalten, ſie immer dieſelben wirklichen und poſitiven Wurzeln wieder geben werden. So hat die Analyſis den Vortheil, die Wege der Vereinfachung, die ſich darbieten, einſchlagen zu können, wenn ſelbſt die Gleichungen hier durch nichtsbedeutende Formen gehen müſſen, vorausgeſetzt, daſs dieſe Gleichungen immer algebraiſch genau bleiben, d. h. daſs die Umformungen, welchen man ſie unterwirft, immer mit den ſtrengen Regeln der Algebra übereinſtimmen.

Eine genaue Formel, d. h. eine genaue Ueberſetzung der Gegebenen, kann ungereimte Werthe enthalten; in der That, wenn ſie nicht zuſammenhängende und unverträgliche Bedingungen und Hypotheſen ausdrückt, ſo wird ſich gerade ihre Genauigkeit darin zeigen, dieſe Unverträglichkeiten durch ungereimte Formen oder unausführbare Verrichtungen anzuzeigen; denn die Syntheſis, wie ich ſchon geſagt habe, drückt nur die Verhältniſſe des Daſeyns unter Quantitäten aus; die Analyſis aber nicht dieſe allein, ſondern auch die Verhältniſſe der Unverträglichkeit.

Selbſt in dem Falle, wenn eine Formel, indem ſie unmögliche Verhältniſſe ausdrückt, auf deren Natur ſelbſt durch die Anzeige gewiſſer unausführbarer Verrichtungen hindeutet, kann ſie doch durch regel-

mäſsige Umformungen der Algebra auf eine klare Form gebracht werden. Aber dann drückt ſie nur die Eigenſchaften des Syſtems aus, die unter einander nicht unverträglich waren. Sind dieſe Eigenſchaften nun dieſem und mehreren anderen Syſtemen gemein, ſo gehört dieſe Formel allen zugleich, und folglich muſs ſie durch die Umformung allgemein genug geworden ſeyn, um ſie auf jede insbeſondere anwendbar zu machen. Dieſs iſt der Grund, warum eine Gleichung, die gemacht ward, um irgend eine beſondere Eigenſchaft auszudrücken, zu einem mehr oder minder erhöhten Grade ſteigt, je nachdem dieſe Eigenſchaft einer gröſseren oder geringeren Anzahl von Syſtemen gehört.

66. Man ſieht leicht ein, daſs man ſo auf eine gemeinſchaftliche Form alle Gleichungen zurückführen kann, die von einander nur durch Zeichen, in der allgemeinſten Bedeutung genommen, verſchieden ſind; denn man kann immer durch die gewöhnlichen Umformungen der Algebra alle Wurzelgröſsen verſchwinden laſſen, und ſo gleich die Formeln dahin bringen, nur durch die Zeichen + und — verſchieden zu ſeyn, welche ſich entſprechende Ausdrücke afficiren. Aber dieſer letzte Unterſchied verſchwindet eben ſo, wenn man alle Ausdrücke, die + haben, in ein Glied, und in das andere alle Ausdrücke, die — haben, bringt, und darauf alles zur zweyten Potenz erhebt.

Wenn man alſo willkührlich die Zeichen, die in eine genaue Formel gehören, veränderte, indem man für das Zeichen + oder — oder überhaupt für den

natürlichen Coefficienten 1 jeder Quantität irgend einen andern Coefficienten, aus den Wurzeln der Einheit genommen, setzte, so würde die so veränderte Formel demohngeachtet durch die bloſsen gewöhnlichen Umformungen der Algebra auf eine genaue und klare Formel gebracht werden können.

Durch diese Verschiedenheit in den Zeichen zeigen sich in den Formeln, welche für verschiedene correlative Systeme passen, die Abweichungen, die sie charakterisiren. Bildet man eine allgemeine Uebersicht dieser Verschiedenheiten, so zeigt man dadurch die Mittel an, auf das eine die Formeln anzuwenden, welche man gefunden haben könnte, indem man die Rechnung auf ein anderes gründete; und bringt man sie durch algebraische Umformungen zur Identität, so findet man die Eigenschaften, die mehreren unter ihnen oder allen gemein sind.

67. Wir wollen z. B. annehmen, man habe zwey Systeme von Quantitäten, deren eines aus

$$a, \; x, \; y$$

zusammengesetzt sey, und so, daſs man $x + y = a$ habe, das andere aus

$$a, \; x', \; y',$$

und so, daſs $x' - y' = a$: so sind diese beyden Systeme offenbar in einfacher, aber indirekter Correlation, weil sie, wenn man das Zeichen von y' verändert, identische Formen annehmen. Dieſs angenommen, wollen wir mit diesen zwey verschiedenen Formeln dieselbe Umformung vornehmen, nachdem wir vorher in der ersten y und a, und in der zweyten die

entſprechenden Quantitäten y' und a verſetzt haben, woraus

$$x - a = -y, \text{ und } x' - a = y' \text{ entſteht.}$$

Erheben wir nun dieſe beyden letzten Gleichungen zur zweyten Potenz, ſo erhalten wir

$$x^2 - 2ax + a^2 = y^2 \text{ und } x'^2 - 2ax' + a^2 = y'^2,$$

Formeln, die durchaus ähnlich ſind, wenn ſie gleich aus anfangs verſchiedenen Formeln gezogen ſind. Man kann alſo jede dieſer Umgeformten anſehen, als drücke ſie die gemeinſchaftlichen Eigenſchaften der zwey aufgeſtellten indirekt correlativen Syſteme aus, indeſs die Eigenſchaften, die eines von dem andern unterſcheiden, nur aus den erſten Formeln $x + y = a$ und $x' - y' = a$ gezogen werden können.

Es iſt bemerkenswerth, daſs die erſte dieſer Gleichungen die iſt, welche die Natur der Ellipſe ausdrückt, wenn man ſie auf ihre Brennpunkte bezieht, und als Coordinaten x, y die Entfernungen jedes Punktes der Curve von dieſen Brennpunkten annimmt. Eben ſo drückt die zweyte die Natur der Hyperbel aus, auf gleiche Weiſe auf ihre Brennpunkte bezogen. Die gemeinſchaftlichen Eigenſchaften der Ellipſe und der Hyperbel ſind alſo durch die, beyden gemeine, Gleichung

$$x^2 - 2ax + a^2 - y^2 = 0$$

ausgedrücht, indeſs man die Eigenſchaften, die ſie unterſcheiden, nur direkt aus den erſten vorher gegebenen Formeln erhalten kann.

Wir wollen ferner zwey Syſteme von Quantitäten annehmen, eins, das aus den vier Quantitäten

$$a, \; b, \; x, \; y$$

besteht, unter denen man die Gleichung

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2 \text{ hat;}$$

das andere, das aus den vier Quantitäten

$$a, \; b, \; x', \; y'$$

zusammengesetzt ist, wo

$$a^2 y'^2 = b^2 x'^2 - a^2 b^2.$$

Zwischen den Quantitäten, die diese beyden Systeme ausmachen, ist weder direkte noch indirekte Correlation, weil man nie die beyden Gleichungen auf eine Form bringen kann, man mag ihre Zeichen verändern wie man will. Setzt man z. B. $-x$ statt x, so behält das Quadrat x^2 demungeachtet dasselbe Zeichen. Aber es ist eine complexe Correlation zwischen den beyden Systemen, d. h. eine einfache indirekte Correlation, nicht zwischen den Quantitäten selbst, von denen wir eben sprachen, sondern zwischen den ähnlichen Funktionen dieser Quantitäten selbst. Statt das erste System als aus a, b, x, y zusammengesetzt zu betrachten, können wir es nur als aus

$$a^2, \; b^2, \; x^2, \; y^2$$

den Quadraten der ersten, bestehend ansehen. So kann das zweyte aus

$$a^2, \; b^2, \; x'^2, \; y'^2$$

den Quadraten der entsprechenden Quantitäten, bestehen. Wir sehen, dass eine einfache indirekte Correlation zwischen den Quantitäten a^2, b^2, x^2, y^2 des ersten und a^2, b^2, x'^2, y'^2 des zweyten statt findet, weil man nur das Zeichen der letztern y'^2 zu verändern braucht, um die Formeln durchaus ähnlich zu machen.

Diefs angenommen, wollen wir mit den beyden Formeln eine gemeinfchaftliche Umformung vornehmen, indem wir blofs alles zur zweyten Potenz erheben, dann werden wir

$$a^4 y^4 = a^4 b^4 - 2 a^2 b^4 x^2 + b^4 x^4, \text{ und}$$

$$a^4 y'^4 = a^4 b^4 - 2 a^2 b^4 x'^2 + b^4 x'^4$$

erhalten, Gleichungen, die durchaus von derfelben Form find, und die folglich die gemeinfchaftlichen Eigenfchaften beyder correlativen Syfteme ausdrücken, obgleich ihre Correlation complex ift.

Die erfte diefer Gleichungen ift die für die Ellipfe auf die grofse Axe bezogen, indem man die Abfciffen vom Mittelpunkte aus, und die Ordinaten rechtwinklicht nimmt; die zweyte ift die für die Hyperbel eben fo auf die erfte Axe bezogen.

Die letztern Gleichungen, die wir eben gefunden haben, enthalten alfo die Eigenfchaften, die diefe beyden Curven gemeinfchaftlich haben, indefs die Eigenfchaften, welche die eine von der andern unterfcheiden, nur aus den erften Gleichungen

$$a^2 y^2 = a^2 b^2 - b^2 x^2 \text{ und}$$

$$a^2 y'^2 = b^2 x'^2 - a^2 b^2$$

gezogen werden können.

68. Eben fo wie man ein gemeinfchaftliches Refultat erhält, was folglich die gemeinfchaftlichen Eigenfchaften beyder Curven in fich fafst, wenn man die Gleichung für die Ellipfe und die Hyperbel zum Quadrat erhebt, eben fo fchliefst auch jede diefer erften Gleichungen, z. B. die der Ellipfe, die beyden Armen der Curve gemeinfchaftlichen Eigenfchaften ein, die man von einander abfondern kann, wenn

man die Quadratwurzel aus dieser Gleichung zieht. Das Resultat dieser Verrichtung ist

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}$$

oder die beyden Wurzeln

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)},$$

$$y = - \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}.$$

Nimmt man nun an, daſs die erste Wurzel den Werth der Ordinate rechts von der Axe genommen bedeute, so drückt die zweyte (38) den Werth einer gleichen Ordinate aus, die man auf der andern Seite der Axe nimmt. So werden diese beyden Wurzeln die unterscheidenden Eigenschaften der beyden Arme derselben Curve ausdrücken, so wie die besondern Gleichungen für die Ellipse und Hyperbel die unterscheidenden Eigenschaften dieser beyden Curven ausdrücken, indeſs ihre gemeinschaftlichen Eigenschaften in einer oder der andern dieser Gleichungen selbst, zum Quadrat erhoben, enthalten sind.

Der Unterschied zwischen den beyden Armen derselben Curve kann, wenn man will, noch deutlicher gemacht werden, wenn man die Curve auf eine andere mit der ersten parallele Axe bezieht. Ihre Entfernung von der ersten sey a, so wird die Gleichung für den ersten Arm

$$y = a + \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)},$$

die für den zweyten

$$y = a - \frac{b}{a} \sqrt{(aa - xx)}.$$

In diesen Gleichungen ist die Verschiedenheit der Form merkbar, und läſst so die unterscheidenden Eigenschaften der beyden Arme der Curve, welche sie ausdrückt, besser erkennen.

69. Dieſs ist, nach meiner Meynung, die wahre Theorie der Quantitäten, welche in der Analysis uneigentlich positive und negative genannt werden. Ich sage uneigentlich, denn es ist klar, daſs es in der That keine an sich positive oder negative Quantitäten giebt, sondern bloſs absolute Quantitäten, die zu andern hinzugefügt, oder wenn sie die kleineren sind, von andern abgezogen werden können. Die Ausdrücke positiv und negativ bezeichnen nur die Gleichförmigkeit oder Nicht-Gleichförmigkeit derer, die man so nennt, mit den ihnen im Ursystem entsprechenden Quantitäten, was man wenigstens stillschweigend als Maaſsstab zur Vergleichung annimmt. Wenn die Eigenschaften dieses Ursystems durch klare Formeln ausgedrückt sind, d. h. durch solche, die keine ungereimte Quantität enthalten und keine unausführbare Verrichtungen anzeigen, und man diese Formeln auf ein anderes System anwenden will, so werden die Quantitäten, welche man positiv nennt, diejenigen seyn, deren Zeichen man nicht zu verändern braucht; die negativen aber diejenigen, deren Zeichen man von + in — verwandeln muſs, und die eingebildeten die, deren Zeichen von + sich in $\sqrt{-1}$ verändert, oder deren Quadrat, Cubus und sonstige Funktion das Zeichen verändern muſs, damit die Formeln des Ursystems, ohne ungereimte Quantitäten oder unausführbare Verrichtungen zu enthalten,

fortdauernd unmittelbar anwendbar auf das betrachtete System seyn mögen.

So ist eine negative Quantität nicht die, welche — als eigenes Zeichen hat, weil keine Quantität ein ihr eigenes Zeichen haben kann, sondern die, die — als Zeichen der Correlation hat. Es ist der Unterschied zweyer absoluten Quantitäten, von denen die ursprünglich gröfsere durch die stufenweise Veränderung des Systems die kleinere geworden ist. Ueberhaupt sind positive, negative und eingebildete Quantitäten im Allgemeinen nichts anders als algebraische Formen, die, wenn man sie in die klaren Formeln des Ursystems für die absoluten Quantitäten setzt, wo die Zeichen + und — keine andere Funktion haben, als ausführbare Verrichtungen anzuzeigen, diese Formeln unmittelbar auf das betrachtete System, wenn man es nach und nach in allen möglichen Zuständen der Umformung betrachtet, anwendbar machen, obgleich die Rechnung nur für die besondere Lage geführt ward, die man als Maafsstab zur Vergleichung annahm, und die wir Ursystem genannt haben.

Wenn man z. B. sagt, dafs der Cosinus eines Bogens, der gröfser als ein Viertheil des Umkreises ist, negativ sey, oder dafs, wenn man π den vierten Theil des Umkreises nennt, man

$$cos\,(\pi + a) = -\,sin\,a$$

habe, so heifst das, dafs die algebraische Form $-\,sin\,a$, in irgend einer Rechnung für die wahre Quantität $cos\,a$ gesetzt, nicht der Genauigkeit der Rechnung Schaden thut, sondern die Resultate dieser Rechnung auf den Fall anwendbar macht, wo d-

Winkel $\pi + a$ ist; obgleich die Betrachtung auf der Hypothese beruhte, dass der Winkel bloss a sey.

Eben so, wenn man sagt, dass

$$\sin(z \cdot \sqrt{-1}) = \frac{e^{-z} - e^{z}}{2\sqrt{-1}}$$

indem e die Zahl vorstellt, deren hyperbolischer Logarithme 1 ist, so bedeutet diess, dass das $2\sqrt{-1}$ und $\frac{e^{-z} - e^{z}}{2\sqrt{-1}}$ zwey algebraische Formen sind, die, wechselseitig in irgend eine Rechnung gesetzt, die man zwischen den wahren Quantitäten z und $\sin z$ führt, welche sie vorstellen, nicht die Genauigkeit des Resultats, aber wohl seine Anwendung ändern, d. h. es auf andere Fälle, als worauf die Betrachtung gegründet wurde, anwendbar machen.

Auf gleiche Art hat Euler die Formel bewiesen

$$\log -a = \log a \pm (2m + 1)\pi\sqrt{-1},$$

wo m irgend eine ganze Zahl und π den halben Umkreis bedeutet. Wir erfahren, dass $-a$, und $\log a \pm (2m + 1)\pi\sqrt{-1}$ zwey algebraische Formen sind, die, in irgend eine zwischen den wahren Quantitäten a und $\log a$ geführte Rechnung gesetzt, nicht die Genauigkeit des Resultats ändern, es aber auf bey den ersten Hypothesen unvorhergesehene Fälle anwendbar machen. Beym ersten Anblick scheinen diese Substitutionen algebraischer negativer oder eingebildeter Formeln für wahre Quantitäten in den Formeln des Ursystems zu nichts zu führen, weil sie in die Rechnung unverständliche Ausdrücke bringen, aber wenn sie legitim sind, wie die, von denen wir

oben ſprachen; ſo iſt die Entwickelung dieſer Formeln, durch die bloſsen Umformungen der Algebra, genug, um das, was ſich darin unverſtändlich und ungereimt fand, verſchwinden zu laſſen, und gerade hierin beſtehen, wie ich ſchon geſagt habe, die eigenen Hülfsquellen der Analyſis, welche der Syntheſis fehlen.

70. Betrachtet man die Frage aus einem andern Geſichtspunkte, ſo kann man freylich übereinkommen, durch die Zeichen + und — ſtets wirkliche Quantitäten, die nur in entgegengeſetztem Sinn von einander genommen werden, zu bezeichnen. Aber dann muſs man ſich erklären, was man unter dem Ausdruck Quantitäten, in entgegengeſetztem Sinne genommen, verſteht, und zeigen, daſs man eben ſo mit Zeichen, durch die man ſie unterſcheidet, verfahren darf, als man thut, wenn man dieſelben Zeichen bloſs zum Ausdruck ausführbarer Verrichtungen braucht. Das iſt aber der ſchwierige Punkt, und ich glaube nicht, daſs man ihn auflöſen kann, wenn man nicht diefen in entgegengeſetzter Richtung genannten Quantitäten die Bedeutung derer beylegt, die ich direkt und invers genannt habe, und wenigſtens ſtillſchweigend das unterſuchte Syſtem auf ein anderes Grundſyſtem bezieht, das als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt. Man iſt nur von dieſer ſtillſchweigenden Annäherung entbunden, wenn man mit dem Grundſyſtem ſelbſt arbeitet, d. h. wenn man ſynthetiſch verfährt, oder nur die Zeichen als Abkürzungen gebraucht, und um ausführbare Verrichtungen anzuzeigen. Hat man dann eine Formel für das Urſyſtem

gefunden,

gefunden, und will sie auf ein anderes anwenden, für das sie nicht gemacht ist, so benutzt man, statt von neuem die Formel, die für den letzten Fall paſst, zu suchen, die erstere, indem man nur die nöthigen Modifikationen darin vornimmt. Diese Modifikationen bestehen, wie ich vorhin gezeigt habe, darin,

1) wenn die Correlation direkt ist, bloſs nach den Fällen die absoluten Werthe der Quantitäten zu ändern;

2) ist die Correlation noch immer einfach, aber indirekt, auſser den absoluten Werthen dieser Quantitäten, die Zeichen einer gröſsern oder geringeren Anzahl unter sich zu ändern.

3) Endlich ist die Correlation bloſs eingebildet oder complex, die Zeichen, nicht der einfachen Quantitäten, die in die Formeln gehören, sondern der mehr oder minder zusammengesetzten Funktionen dieser Quantitäten, zu verändern.

Ist einmal die Veränderung der Zeichen in der untersuchten Formel bewirkt, so wird sie auf das umgeformte System unmittelbar anwendbar, eben so wie sie es vor der Veränderung auf das Ursystem war; und dieſs umgeformte System kann jetzt als Maaſsstab zur Vergleichung für andere dienen, wenn man mit der für dasselbe geeigneten Formel neue Modifikationen vornimmt, welche die Veränderungen heischen, die eintreten müssen, nachdem das System andere Umformungen leidet.

So entspringt diese Theorie wesentlich aus einem Grundsatz, der nicht allein auf die hier behandelte Frage angewandt werden kann, sondern auf alle

Theile der Mathematik und der Dialektik überhaupt, und der darin besteht, immer die verschiedenen unbekannten Gegenstände, die man vergleichen will, auf dasselbe bekannte Objekt zu beziehen, das man als Maaſsstab zur Vergleichung annimmt. Durch dieses Mittel löst man die Schwierigkeit auf, und bringt die verwickelte Frage, das Verhältniſs zwischen zwey unbekannten Dingen darzustellen, auf diese beyden einfachen Fragen nämlich, das Verhältniſs jedes dieser unbekannten Dinge insbesondere, zu demselben dritten bekannten Dinge darzustellen. Dieſs ist bey allem der natürliche Gang des Geistes.

71. Der ganze Kunstgriff der Numeration z. B. besteht darin, ein Mittel zu finden, eine kleine Anzahl Ziffern in methodische Ordnung zu bringen, so daſs man bloſs mit diesen Ziffern alle mögliche Zahlen auf die Art darstellen kann, daſs man auch theilweise auf sie wirken und so Schwierigkeiten vermeiden könne, indem man die Verrichtungen, die man mit beträchtlichen Zahlen vorzunehmen hat, in eine Reihe theilweiser Verrichtungen an kleinen Zahlen verwandelt; d. h. an Zahlen, die klein genug sind, damit man sich von jeder einen klaren Begriff bilden, und sie unmittelbar durch Aufmerksamkeit und Gedächtniſs mit einander verbinden könne. Diese stellen also hier das Ursystem vor, auf das alle andere Zahlen bezogen werden.

72. So ist jede Verrichtung der Arithmetik, als Addition, Subtraktion, Multiplikation u. s. w. nichts als ein Verfahren, wodurch man nach der Reihe auf die Einheiten, Zehner, Hunderter u. s. w. vorge-

ſtellter Zahlen wirkt, wenn ſie ſelbſt zu beträchtlich ſind, als daſs der Geiſt geradezu das ganze Reſultat ihrer Zuſammenſtellung faſſen könne.

73. Eben ſo iſt es mit der Algebra. Ihr Zweck iſt, die Reihe der Verrichtungen anzuzeigen, die vorgenommen werden müſſen und die die Arithmetik ausführen ſoll, um ein geſuchtes Reſultat zu erhalten. Man kennt nicht immer genau den Werth einer Quantität, obgleich man weiſs, daſs ſie von andern gegebenen Quantitäten abhängt, und das Geſetz kennt, nach dem ſie von ihnen abhängt. Um ihn zu finden, muſs man die Hauptfrage auflöſen und auf mehrere einander folgende Verrichtungen zurückführen. Nun iſt es gerade dieſe Reihe von Verrichtungen, deren Natur man kennen, und welche man durch beſtimmte Zeichen anzeigen muſs, und in dieſer Unterſuchung und dieſer Anzeige beſteht die Algebra oder vielmehr die Analyſis, von der die Algebra, um eigentlich zu reden, nur ein Werkzeug oder eine eigenthümliche Sprache iſt.

74. In der Geometrie bietet eine Figur, die aus verſchiedenen geraden und krummen Linien zuſammengeſetzt iſt, die in verſchiedenen Ebenen gezogen ſind, beym erſten Anblick dem Geiſte nur ein verwirrtes Bild dar, und unbeſtimmte Verhältniſſe zwiſchen ihren Theilen. Aber zerlegt man ſie in einfachere Figuren und vergleicht nach der Reihe zwey und zwey, drey und drey, die dahin gehörigen Linien und Winkel, ſo entdeckt man alle theilweiſen Verhältniſſe, die man nachher verbindet, und das Reſultat dieſer Folge von Verbindungen iſt die

Kenntniſs der verſchiedenen Eigenſchaften der aufgeſtellten Figur.

75. In der Analyſis des Unendlichen nimmt man ein feſtes Syſtem von Quantitäten an, um als Maaſsſtab zur Vergleichung zu dienen. Nachher ſtellt man ſich vor, daſs dieſes Syſtem ſich durch unmerkliche Stufen ändere; man betrachtet jede der Quantitäten, die das feſte Syſtem ausmachen, als die Gränze der ihr im veränderlichen Syſtem entſprechenden, und nennt den Unterſchied jeder Veränderlichen von ihrer Gränze unendlich klein. Nachher ſucht man, durch Hülfe der Bedingungen der Aufgabe, Gleichungen zwiſchen den Veränderlichen, ihren Gränzen und ihren Unterſchieden, die unendlich klein genannt werden: man ſchafft dieſe letzten weg, durch eine zufällige Vereinfachung, die dieſer Rechnung eigen iſt, und daher entſteht, daſs dieſe unendlich klein genannten Quantitäten, ſo viel man will, abnehmen, und durch die ſtufenweiſe Annäherung und endliche Coincidenz des veränderlichen und feſten Syſtems zugleich verſchwinden können. Endlich bleiben die geſuchten Gleichungen zwiſchen den Veränderlichen und ihren Gränzen nach, d. h. zwiſchen dem Syſtem, deſſen Eigenſchaften man ſucht, und dem Urſyſtem, das als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt.

76. Die Unterſuchung über direkte und inverſe Gröſsen, die wir hier abhandeln, hat viel Analogie mit dem, was eben über Analyſis des Unendlichen geſagt iſt. Man nimmt eben ſo ein fixes Syſtem an, um als Maaſsſtab zur Vergleichung zu dienen; man betrachtet jede der Gröſsen, die es ausmachen, als

die Gränze der ihr im veränderlichen System entsprechenden, oder den Ausdruck, auf den man sie beständig während der Veränderung bezieht; man nimmt den Unterschied von zwey beliebigen Grössen des vorgestellten Systems, und man vergleicht diesen Unterschied mit dem ihrer beyderseitigen Gränzen, indem man immer nur die absoluten Werthe der einen sowohl wie der andern betrachtet. So lange diese Veränderlichen mit ihren Gränzen in direkter Ordnung sind, d. h. so lange die grössere von diesen beyden Veränderlichen, der grösseren ihrer Gränzen entspricht, wird der Unterschied dieser Veränderlichen in direkter Bedeutung genannt; gehen aber diese Veränderlichen zur inversen Ordnung über, d. h. wird die, die der grössern Gränze entspricht, kleiner als die, welche der kleineren Gränze entspricht, so heisst sie in inverser Bedeutung. Denn um die Eigenschaften des vorgestellten Systems zu finden, fängt man damit an, die Eigenschaften des festen Systems zu suchen, das als Maasstab zur Vergleichung angenommen ist, und hat man die Formeln, die sie ausdrücken, gefunden, so eignet man sie für das correlative, vorgestellte System, indem man für die Quantitäten, die das feste System ausmachen, die Werthe der Correlation des neuen setzt, d. h. indem man mit den erstern, sowohl in Hinsicht auf absoluten Werth, als auf Zeichen, die Veränderungen vornimmt, welche der Unterschied des Wesens dieser Systeme erfordert.

77. Ich schliesse diesen ersten Abschnitt mit einer Bemerkung, die mir sehr wichtig scheint. Ich habe schon gesagt, dass die Regeln für die Zusammenstel-

lung der Zeichen in algebraiſchen Verrichtungen nur bewieſen werden können, wenn dieſe Verrichtungen ausführbar ſind; daſs z. B. es nicht möglich iſt, auf eine genugthuende Art zu beweiſen, daſs

$$-a \cdot -a = a^2.$$

In dieſem Fall alſo, und in allen Fällen, wo die Verrichtungen, die ausgeführt werden ſollen, ſich nicht mit wahren Quantitäten beſchäftigen, d. h. mit wirklichen und poſitiven, kann man ſie nur precär gebrauchen. Ich darf ſelbſt hinzufügen, daſs ſie dann Ausnahmen unterworfen ſind, und daſs z. B. in dieſen Fällen *minus* durch *minus* multiplicirt, nicht immer *plus* giebt.

Wir wollen $\sqrt{(a-b)} \cdot \sqrt{(a-b)}$ annehmen, ſo haben wir nach den Regeln für die Zuſammenſtellung der Zeichen

$$\sqrt{(a-b)} \cdot \sqrt{(a-b)} = \sqrt{(a^2-2ab+b^2)}.$$

Eine Gleichung, die bey allen Werthen von a und b ſtatt haben muſs, ſo lange $a > b$, d. h. ſo lange $a-b$ eine wahre Quantität iſt. Wäre dieſe Regel auf negative wie auf poſitive Quantitäten anwendbar, ſo würde dieſelbe Gleichung beſtehen, wenn a kleiner als b würde; das iſt aber nicht der Fall: denn wenn wir zum Beyſpiel $a = 0$ annehmen, ſo bringt man die Gleichung auf

$$\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-b} = \sqrt{+b^2} = b.$$

Dieſs iſt aber falſch: denn, wie jeder weiſs, iſt

$$\sqrt{-b} \cdot \sqrt{-b} = -b.$$

Die Regel der Zeichen iſt alſo in dieſem Fall einer Ausnahme unterworfen.

Eben ſo iſt $2 \log a = \log a^2$, ſo lange a eine wirkliche Quantität iſt. Wäre die Regel auf negative Quantitäten anwendbar, ſo hätte man

$$2 \log -a = \log (-a)^2 = \log a^2,$$

alſo

$$2 \log -a = 2 \log a,$$

oder

$$\log -a = \log a,$$

welches falſch iſt, und aus dieſem Irrthum iſt der Streit über die Logarithmen der negativen Quantitäten entſtanden.

Alſo ſind die Regeln der Algebra Ausnahmen unterworfen, wenn die Verrichtung nicht an wahren Quantitäten vorgenommen wird; alſo giebt es kein Mittel *a priori*, die Regeln der Analyſis zu beweiſen, die ohne Unterſchied poſitive, negative oder eingebildete Gröſsen behandelt. Alſo kann ihr Verfahren nie durch Uebereinſtimmung der Reſultate der Syntheſis gerechtfertigt werden, und durch das Vertrauen, was die beſtändige Genauigkeit ihrer verificirten Reſultate geben muſs. Deswegen ſuchten die erſten Mathematiker, die von ihr Gebrauch machten, immer die Kette der erkennbaren oder ſynthetiſchen Wahrheiten wieder anzuknüpfen, wenn ſie ihren Gegenſtand durch die Kette der hieroglyphiſchen oder analytiſchen Wahrheiten erreicht hatten.

Zweyter Abſchnitt.

Darſtellung der Art, die Correlation verſchiedener Figuren und die jedesmaligen Stellungen der verſchiedenen Theile einer Figur zu finden.

78. Was ich im erſten Abſchnitte geſagt habe, betrifft alle Arten von Quantitäten; jetzt will ich es verſuchen, dieſe allgemeinen Grundſätze auf geometriſche Quantitäten insbeſondere anzuwenden.

In dieſem Abſchnitt will ich eine Art ſuchen, die geeignet ſey, ſowohl durch die gewöhnlichen Zeichen der Algebra, als auch durch andere Merkmahle, über die man eins geworden iſt, und durch ſyſtematiſche Anordnung der Buchſtaben, durch welche man die merkwürdigen Punkte einer Figur ausdrückt, ſowohl die Correlation verſchiedener Figuren darzuſtellen, die auf ein Urſyſtem bezogen werden können, als auch die jedesmalige Stellung der Punkte, Linien, Winkel, Flächen u. ſ. w., die zur Zuſammenſetzung eines jeden gehören, zu bezeichnen.

Wir wollen zwey beliebige Syſteme annehmen, die aus einer gleichen Zahl von Punkten beſtehen, welche aber verſchieden geordnet ſind. Nun wollen wir eins mit dem andern vergleichen, und die Punkte des erſten, in welcher Ordnung man will, mit den Punkten des zweyten. Sich entſprechende Punkte ſollen die heiſsen, die ſo zwey und zwey verglichen ſind, einer im erſten, der andere im zweyten Syſtem.

Ferner wollen wir annehmen, daſs in jedem von dieſen Syſtemen man dieſelbe Zahl gerader Linien ziehe, dieſelbe Zahl von Umkreiſen beſchreibe, ſie durch dieſelbe Zahl von Ebenen ſchneide, indem man immer dieſe geraden Linien, Umkreiſe und Ebenen durch ſich entſprechende Punkte führt, und daſs endlich alles auf einer Seite ausgeführte es eben ſo auf der andern ſey. Es iſt leicht einzuſehen, daſs zwey ähnliche Syſteme zu denen gehören, die ich correlative Syſteme oder correlative Figuren genannt habe; Punkte, Linien, Winkel, Bogen, Flächen, Maaſse, die daraus entſpringen, und die auf gleiche Art in beyden Syſtemen begründet ſind, werde ich eben ſo ſich entſprechend nennen. Endlich nenne ich diejenigen Funktionen, Formeln, Gleichungen correlativ, die ihm analoge Eigenſchaften ausdrücken. Alle dieſe Begriffe treffen augenſcheinlich mit denen überein, die wir ſchon im erſten Abſchnitte entwickelt haben.

Die correlativen Figuren ſind deswegen nicht ähnliche; denn ſind ſie gleich aus derſelben Anzahl ſich entſprechender Theile zuſammengeſetzt, ſo kön-

nen diese Theile doch verschiedene Verhältnisse haben. Auch die correlativen Punkte sind nicht Punkte, die auf ähnliche Art in verschiedenen Systemen geordnet sind, weil man sie willkührlich stellen kann. Sind diese Punkte aber ähnlich gestellt, so kann man sagen, dass zwischen den beyden Systemen eine Correlation der Aehnlichkeit ist. Eben so kann man die Correlation der Symmetrie unterscheiden, wenn die verglichenen Figuren *) in der That symmetrisch sind, und endlich die Correlation der Identität oder der Congruenz, wenn die beyden Figuren durchaus ähnlich und gleich unter einander sind.

Weil die Grundlage von jedem dieser Systeme eine Vereinigung von Punkten ist, die in gleicher Anzahl in dem einen, wie in dem andern sind, so können wir uns vorstellen, dass, indem das eine von diesen Systemen fest und als Maassstab zur Vergleichung angenommen ist, das andere sich unmerklich verändere, so dass jeder von seinen Punkten stufenweise sich dem entsprechenden Punkte im andern Systeme nähere, und endlich in ihn falle, so dass dann die beyden Systeme sich vermischen und identisch werden würden. Eben so kann man sich vorstellen, dass, wenn zwey Systeme gleich anfangs identisch gemacht sind, eines von ihnen fest bleibe, und das andere sich unmerkbar davon entferne, indem es

*) Den wahren Begriff von symmetrischen Figuren hat Legendre in seiner Geometrie aufgestellt. A. d. Vf.

L. VI. def. XVI. p. 163. u. *Not.* 1. *p.* 275. A. d. Ueb.

ſtufenweiſe ſeine Geſtalt verändert, und indem jeder Punkt eine Stellung annimmt, die mehr oder minder der ähnlich iſt, die er im Urſyſtem hatte.

Ich nehme alſo an, daſs man die Eigenſchaften irgend einer Figur kenne, die ich als Maaſsſtab zur Vergleichung brauche, und ſuche, welche Modifikationen die Formeln oder Gleichungen erleiden müſſen, die dieſe bekannten Eigenſchaften ausdrücken, wenn man ſie übertragen oder davon die Anwendung auf correlative Figuren machen will.

Wenn man alle correlativen Figuren als verſchiedene Zuſtände eines Urſyſtems betrachtet, das ſich durch unmerkliche Stufen verändert, ſo kann man die gefundenen Formeln als allen andern gehörig anſehen, und man muſs nur, um ſie anzuwenden, in jedem beſondern Falle den verſchiedenen Veränderlichen die ihnen gehörigen abſoluten Werthe geben, und die Zeichen ſo verändern, wie es die Modifikationen, welche das Syſtem erlitten hat, verlangen.

Im Gegentheil, wenn das Urſyſtem und die ſich darauf beziehenden Formeln gegeben ſind, ſo kann man fragen, welches das correlative Syſtem ſey, auf das man dieſe Formeln, ſo oder ſo modificirt, beziehen könne?

Endlich kann man fragen, welche Formeln zu gleicher Zeit auf zwey Syſteme anwendbar ſeyn können, d. h. welche allgemeine Formeln zu gleicher Zeit die, auf jedes dieſer Syſteme insbeſondere anwendbaren, Formeln enthalten können?

79. Um die Correlation zweyer Figuren darzuſtellen, werde ich erſt die Correlation der Punkte,

dann die der Linien, der Winkel, der Bogen, der Flächen u. f. w. darftellen.

In Hinficht auf die Punkte unterfcheide ich zwey Arten von Correlation, nämlich die **Correlation der Conftruktion**, und die **Correlation der Stellung**. Die Correlation der Conftruktion ift die, welche man zwifchen den Punkten zweyer Figuren aufftellt, wenn man fie in der Ordnung ihrer jedesmaligen Conftruktion betrachtet; die Correlation der Stellung diejenige, die man zwifchen eben diefen Punkten aufftellt, wenn man fie in der Ordnung betrachtet, nach der fie auf den fie enthaltenden correlativen Linien geftellt find.

Es feyen z. B. (*Fig.* 9 u. 10.) zwey Dreyecke ABC, $A'B'C'$, in welchen ich A und A', B und B', C und C' für wechfelfeitig correlativ nehme. Aus den correlativen Punkten A, A' wollen wir auf die entgegengefetzten Seiten die Perpendikel $\overline{AD}$, $\overline{A'D'}$ fallen laffen, fo werden die Punkte D, D', in der Ordnung der Conftruktion, unter einander correlativ feyn. Aber wenn wir annehmen, dafs im erften Dreyeck ABC, das als Maafsftab zur Vergleichung genommen ift, D zwifchen B und C falle, während im zweyten der Punkt C' fich zwifchen B' und D' befindet, fo befteht die Correlation der Stellung im Ausdruck diefes Unterfchiedes.

Um die Correlation der Conftruktion aufzuftellen, ift es genug, die Reihe der Punkte, die jede Figur beftimmen, hinzufchreiben, indem man fie in derfelben Ordnung unter einander, jeden unter den ihm entfprechenden fetzt, wie hier.

Correlation der Conſtruktion.

1ſtes Syſtem $A\ B\ C\ D$

2tes Syſtem $A'\ B'\ C'\ D'$.

Daraus ſeh' ich, daſs in der Ordnung der Conſtruktion A' dem Punkte A, B' dem Punkte B u. ſ. w. entſpricht. Jetzt wollen wir auch die Correlation der Stellung darſtellen. Hier ſehe ich, daſs, um dieſe Correlation auszudrücken, man nothwendig anzeigen muſs, daſs D in der erſten Figur ſich auf der geraden Linie $\overline{BC}$ zwiſchen B und C befindet; in der zweyten aber D' ſich auf $\overline{B'C'}$ ſo befindet, daſs C' zwiſchen B' und D' liegt. Um dieſe Modifikation anzuzeigen, iſt es genug, die zwey Reihen der ſich entſprechenden Punkte, nach der Ordnung, in der ſie auf den correlativen Grundlinien $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$ geſtellt ſind, hinzuſchreiben:

1ſtes Syſtem $\overline{B\ D\ C}$

2tes Syſtem $\overline{B'\ C'\ D'}$.

Die Linien, welche über dieſen Reihen von Punkten gezogen ſind, zeigen an, daſs die Punkte auf geraden Linien geſtellt ſind.

Auf eben die Art drücke ich die Correlation der Stellung zweyer Reihen von Punkten aus, die auf correlativen Bogen einer Curve liegen, nur mit dem Unterſchiede, daſs ich darüber eine krumme Linie ſtatt einer geraden ziehe; ſo daſs, wenn A, B, C, D vier Punkte ſind, die auf dem Bogen eines Cirkels in der Ordnung A, B, C, D liegen, während die ihnen entſprechenden A', B', C', D', auf dem correlativen Cirkelbogen, in der Ordnung A', C', B', D' liegen, man

ihre Correlationen der Conſtruktion und der Stellung ſo ausdrücken kann:

Correlation der Conſtruktion,

1ſtes Syſtem $A\ B\ C\ D$

2tes Syſtem $A'\ B'\ C'\ D'$.

Correlation der Stellung,

1ſtes Syſtem $\overset{\frown}{A\ B\ C\ D}$

2tes Syſtem $\overset{\frown}{A'\ C'\ B'\ D'}$.

80. Ueberhaupt um eine gerade Linie zu bezeichnen, ziehe ich eine gerade Linie über den Buchſtaben, die ihre Punkte andeuten, und um einen Bogen einer Curve zu bezeichnen, ziehe ich über den Buchſtaben, die ihre Punkte andeuten, eine krumme Linie.

So bedeuten

$\overset{\frown}{AB}$

$\overset{\frown}{CDE}$

$\overset{\frown}{BCDF}$

Bogen der Curve, AB, CDE, $BCDF$ u. ſ. w. Dieſe Ausdrücke beziehen ſich gewöhnlicherweiſe auf Cirkelbogen, weil ein Cirkelbogen die einfachſte Curve iſt, die zugleich als Maaſsſtab zur Vergleichung für andere dient, indem man ſie wie einen Maaſsſtab gebraucht, ihre verſchiedenen Krümmungen zu meſſen.

81. Da nach der Ordnung der Conſtruktion die correlativen Punkte Durchſchnitte der correlativen Linien ſind, ſo werden wir oft ſagen müſſen, daſs der oder der Punkt der Durchſchnitt von den oder den Linien ſey, welches wir auf folgende Art abkürzen können. Um z. B. den Durchſchnittspunkt

zweyer geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ auszudrücken, ſchreibe ich

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD};$$

d. h. die beyden geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, mit einem Punkte zwiſchen den beyden oben gezogenen Linien. So bedeutet dieſe Abkürzung den Punkt des Zuſammentreffens der beyden geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, ſo weit es nöthig iſt, verlängert.

Eben ſo, um den Punkt des Zuſammentreffens zweyer Bogen $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ einer Curve auszudrücken, ſchreibe ich

$$\overset{\frown}{AB} \cdot \overset{\frown}{CD};$$

um den Punkt des Zuſammentreffens einer geraden Linie $\overline{AB}$ mit dem Bogen einer krummen $\overset{\frown}{CD}$ zu bezeichnen,

$$\overline{AB} \cdot \overset{\frown}{CD} \quad \text{oder} \quad \overset{\frown}{CD} \cdot \overline{AB}.$$

Sind zwey gerade Linien oder zwey Bogen, oder eine gerade Linie und ein Bogen durch die bloſsen Buchſtaben a, b ausgedrückt, ſo drückt man ihr Zuſammentreffen ſo aus

$$a \cdot b.$$

So ſieht man, daſs $\overline{F\,\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$ z. B. die gerade Linie vom Punkte F auf den Durchſchnittspunkt von $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ gezogen bedeutet und

$$\overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}\ \ \overset{\frown}{FG} \cdot \overset{\frown}{HK}}$$

die Linie vom Durchſchnittspunkte der Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, nach dem Durchſchnittspunkt der Bogen $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{HK}$; daſs ferner

$$\overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}\ \ \overset{\frown}{FG} \cdot \overset{\frown}{HK}} \cdot \overset{\frown}{LM}$$

der Punkt iſt, wo der Bogen $\overset{\frown}{LM}$ die gerade Linie

ſchneidet, die vom Durchſchnittspunkte der Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ nach dem Durchſchnittspunkte $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{HK}$ gezogen wird. Eben ſo iſt es in andern Fällen. Dieſe einfache Art der Bezeichnung verkürzt auſserordentlich die Abhandlung.

82. Um auszudrücken, daſs zwey Punkte in einander fallen, oder nur ein und derſelbe Punkt ſind, den man auf zwey Arten betrachtet, bezeichne ich ſeinen doppelten Ausdruck durch das Zeichen $\ddagger$, das ich Zeichen der Aequipollenz nenne. Z. B. wenn die geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ im Punkte E zuſammentreffen, ſo ſchreibe ich

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} \ddagger E.$$

Treffen zwey gerade Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ in demſelben Punkte zuſammen, wo ſich zwey Bogen $\overset{\frown}{FG}$, $\overset{\frown}{HK}$ ſchneiden, ſo ſchreibe ich

$$\overline{AB}\cdot\overline{CD} \ddagger \overset{\frown}{FG}\cdot\overset{\frown}{HK}.$$

Ueberhaupt bediene ich mich des Zeichens der Aequipollenz, um die Identität zweyer Gegenſtände auszudrücken. So bedeutet $a \ddagger b$, daſs der Werth von a derſelbe iſt, als der von b. In dieſem Falle drückt es alſo daſſelbe aus, als $\doteq$; aber das Zeichen der Aequipollenz iſt zu gleicher Zeit auf Punkte und auf alle Gegenſtände anwendbar, die eins für das andere geſetzt werden können.

83. Ich habe ſchon geſagt, wie ich die Bogen von geraden Linien unterſcheide. Eben ſo brauche ich auch die Abkürzung $A\hat{B}C$ für den Winkel ABC. Um den Winkel zu bezeichnen, den zwey gerade Linien $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ bilden, ſchreibe ich

$$\overline{AB}\,\hat{}\,\overline{CD}.$$

Eben

Eben ſo, um den Winkel auszudrücken, den zwey Bogen bey ihrem Durchſchnitt machen, ſchreibe ich

$$\overset{\frown}{AB} \,\hat{}\, \overset{\frown}{CD}.$$

Für Oberfläche oder Fläche *ABCD* ſchreibe ich

$$\overline{\overline{ABCD}}.$$

Um den Winkel auszudrücken, den eine Linie mit einer Fläche macht, ſchreibe ich

$$\overline{AB} \,\hat{}\, \overline{\overline{CDEFG}}.$$

Um den Winkel auszudrücken, den zwey Flächen bilden, ſchreibe ich

$$\overline{\overline{ABC}} \,\hat{}\, \overline{\overline{DEFG}}.$$

Sind dieſe Linien oder Flächen durch bloſse Buchſtaben a, b, c, d bezeichnet, ſo bezeichne ich die Winkel, die ſie bilden, ſo:

$$a \,\hat{}\, b, \quad a \,\hat{}\, c, \quad b \,\hat{}\, d \text{ u. ſ. w.}$$

Ich begnüge mich mit dieſer kleinen Anzahl Abkürzungen, und werde ſie ſelbſt nur im Nothfall gebrauchen; aber man ſieht, daſs ihr Gebrauch ſehr leicht iſt, und daſs ſie viel dazu beytragen, einen deutlichen Begriff von den Gegenſtänden zu geben und die Vergleichung der Gegenſtände, die aus verſchiedenen Syſtemen gezogen ſind, durch Hülfe der Tafeln der Correlation klar und faſslich machen.

84. Was Linien, Winkel, Bogen, Flächen, körperlichen Inhalt und ſonſtige Werthe betrifft, muſs man die Correlation der Quantitäten oder abſoluten Werthe, und die Correlation der Zeichen unterſcheiden.

Man ſtellt die Correlation der abſoluten Werthe auf, wenn man die ſich entſprechenden Quantitäten bloſs eine unter die andere ſchreibt. So z. B. wenn man zwey Syſteme von Quantitäten hat, von denen das eine aus den Quantitäten A, B, C, D u. ſ. w. beſteht, das andere aus den correlativen Quantitäten a, b, c, d u. ſ. w., ſo begründet man ſo die

Correlation der abſoluten Werthe:

1ſtes Syſtem A, B, C, D u. ſ. w.

2tes Syſtem a, b, c, d u. ſ. w.

Dieſs wird immer leicht geſchehen können, wenn man nur die vorhin erklärte Correlation der Conſtruktion hat, weil man nur die Punkte zu nehmen braucht, welche dieſe Quantitäten nach derſelben Ordnung der Conſtruktion in den beyden verglichenen Syſtemen beſtimmen.

Bey den Dreyecken $ABCD$, $A'B'C'D'$ (*Fig.* 9 und 10.), die wir ſchon vorher betrachtet haben, iſt die Correlation der Conſtruktion unter den Punkten:

1ſtes Syſtem $ABCD$

2tes Syſtem $A'B'C'D'$.

Man kann alſo ohne Schwierigkeit ſchlieſsen, daſs man folgende Correlation zwiſchen den abſoluten Werthen der Linien, der Winkel und der Flächen haben wird.

Correlation der abſoluten Werthe:

$$\begin{array}{l} \text{1ſtes Syſtem} \\ \text{2tes Syſtem} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{BC},\ \overline{BD},\ \overline{CD},\ \overline{AD},\ B\hat{A}C \\ \overline{A'B'},\ \overline{A'C'},\ \overline{B'C'},\ \overline{B'D'},\ \overline{C'D'},\ \overline{A'D'},\ B'\hat{A'}C' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A\hat{B}C,\ A\hat{C}B,\ B\hat{A}D,\ C\hat{A}D,\ \overline{\overline{ABC}},\ \overline{\overline{ABD}},\ \overline{\overline{ACD}}. \\ A'\hat{B'}C',\ A'\hat{C'}B',\ B'\hat{A'}D',\ C'\hat{A'}D',\ \overline{\overline{A'B'C'}},\ \overline{\overline{A'B'D'}},\ \overline{\overline{A'C'D'}}. \end{array} \right.$$

Das geſchieht, wenn man gleich anfangs in einer Folge die Reihe aller Quantitäten des erſten Syſtems ſchreibt, die man mit denen des zweyten vergleichen will; und dann unter jeder von ihnen die Reihe der entſprechenden Buchſtaben, welche die entſprechenden Quantitäten des zweyten Syſtems beſtimmen.

So beſtimmen die beyden erſten Buchſtaben A, B, die man aus der Correlation der Punkte nimmt, nach der Reihe geſchrieben, die gerade Linie $\overline{AB}$: die ihnen entſprechenden Buchſtaben A', B' des zweyten Syſtems nach der Reihe geſchrieben, die gerade Linie $\overline{A'B'}$, welche mit $\overline{AB}$ correlativ iſt. Auf gleiche Weiſe beſtimmen der zweyte, der erſte und der vierte Buchſtabe des erſten Syſtems nach einander geſchrieben den Winkel $B\hat{A}D$; der zweyte, der erſte und der vierte Buchſtabe des zweyten Syſtems in derſelben Ordnung nach einander geſchrieben den correlativen Winkel $B'\hat{A'}D'$ dieſes zweyten Syſtems, d. h. $B\hat{A}D$ und $B'\hat{A'}D'$ ſind correlative Quantitäten. Eben ſo iſt es mit den andern.

Man ſieht daraus, daſs im Allgemeinen die Correlation der Quantitäten oder abſoluten Werthe nur von der Correlation der Conſtruktion abhängt.

85. Hat man die Correlation der Conſtruktion aufgeſtellt, ſo geht man zur Correlation der Zeichen; dieſe hängt von der Correlation der Stellung ab.

Z. B. in den vorher verglichenen Dreyecken war die Correlation der Stellung der Punkte (79):

1ſtes Syſtem $\overline{BDC}$

2tes Syſtem $\overline{B'C'D'}$.

Ich ſehe, daſs eine Inverſion zwiſchen den Punkten *D*, *C* und den ihnen entſprechenden *D'*, *C'* vorgegangen iſt; d. h. daſs ſie ihre Ordnung verändert haben. Daraus ſchlieſse ich, daſs die beyden Syſteme nur indirekt correlativ ſind. Man muſs alſo nach der Reihe ſuchen, welche Quantitäten direkt geblieben, und welche invers geworden ſind, und den erſtern +, den andern — als Zeichen der Correlation geben.

In Hinſicht auf das Syſtem, welches als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen wird, habe ich ſchon geſagt, daſs die Quantitäten, die es ausmachen, an ſich gar keine Zeichen haben, weil es bloſse abſolute Werthe ſind, aber daſs, wenn man das Urſyſtem als das erſte correlative Syſtem anſieht, man ihnen das Zeichen + geben kann (52).

86. Iſt die Correlation der Zeichen aufgeſtellt, ſo leitet man daraus die Werthe der Correlation, weil ſie aus den abſoluten Werthen mit ihren Zeichen zuſammengenommen beſtehen. Wir wollen alſo dieſe Werthe der Correlation nach der Folge für jede der Quantitäten aufſtellen, welche die beyden verglichenen Syſteme ausmachen. Hier iſt das Reſultat, welches ich gleich nachher beweiſen werde.

Allgemeine Tafel der Correlation beyder Systeme.

$$\begin{array}{ll} \text{1stes System} & \left\{ \begin{array}{l} +\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD} \\ +\overline{A'B'}+\overline{A'C'}+\overline{B'C'}+\overline{B'D'}-\overline{C'D'} \end{array} \right. \\ \text{2tes System} & \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +\overline{AD}+B\hat{A}C+A\hat{B}C+A\hat{C}B+B\hat{A}D+C\hat{A}D \\ +\overline{A'D'}+B'\hat{A'}C'+A'\hat{B'}C'+A'\hat{C'}B'+B'\hat{A'}D'-C'\hat{A'}D' \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} +\overline{\overline{ABC}}+\overline{\overline{ABD}}+\overline{\overline{ACD}}. \\ +\overline{\overline{A'B'C'}}+\overline{\overline{A'B'D'}}-\overline{\overline{A'C'D'}}. \end{array} \right.$$

Um diese Tafel der Correlation zu beweisen, stelle ich mir vor, dass das Urdreyeck $ABCD$ sich in $A'B'C'D'$ durch die Bewegung des Punktes C auf $\overline{CB}$ verändere, vermöge deren er sich zwischen B und D stellt. Diess festgesetzt, so sehe ich, dass bey dieser Bewegung keine von den Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{AD}$ weder durch o noch durch ∞ geht. Also sind diese Quantitäten im zweyten Systeme direkt (49); also ist das Zeichen der Correlation für jede von ihnen in diesem zweyten Systeme +, wie es auch die Tafel angiebt. Im Gegentheil geht $\overline{CD}$, um $\overline{C'D'}$ zu werden, durch o in dem Augenblicke, wo C in D fällt. Diese Quantität kann also invers werden, und wird es in der That, denn im Ursystem hat man $\overline{CD} = \overline{BC} - \overline{BD}$, und im umgeformten Systeme im Gegentheil $\overline{C'D'} = \overline{B'D'} - \overline{B'C'}$. Also ist das Zeichen der Correlation für $C'D'$ —, wie es die Tafel auch zeigt.

Eben so geht offenbar während der Bewegung des Punktes C keine der Quantitäten $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{A}D$, $\overline{\overline{ABC}}$, $\overline{\overline{ABD}}$ weder durch o, noch durch ∞.

Alſo iſt das Zeichen der Correlation für jede von ihnen im umgeformten Syſteme $+$; aber $C\hat{A}D$, $\overline{ACD}$ verſchwanden beyde in dem Augenblicke, wie C in D fiel: dieſe beyden Quantitäten können alſo invers geworden ſeyn, und das iſt in der That der Fall, denn im erſten Syſtem hat man $C\hat{A}D = B\hat{A}C - B\hat{A}D$, und im Gegentheil im umgeformten Syſtem $C'\hat{A}'D' = B'\hat{A}'D' - B'\hat{A}'C'$. Eben ſo hat man im erſten Syſteme $\overline{ACD} = \overline{ABC} - \overline{ABD}$; und im zweyten im Gegentheil $\overline{A'C'D'} = \overline{A'B'D'} - \overline{A'B'C'}$. Alſo ſind die Quantitäten $C'\hat{A}'D'$, $\overline{A'C'D'}$ invers; alſo iſt ihr Zeichen der Correlation $-$, wie es die Tafel giebt. Alſo ſtellt dieſe Tafel genau die Correlation der beyden vorgeſtellten Syſteme vor.

Es folgt daraus, daſs, wenn die Eigenſchaften des Urdreyecks auf irgend eine Art durch Formeln ausgedrückt wären, oder durch Verhältniſſe oder Gleichungen, die nur die in der Tafel aufgerechneten Quantitäten enthalten, man, um dieſe Formeln auf das umgeformte Syſtem anwendbar zu machen, für jeden der darin befindlichen Werthe bloſs den Werth der Correlation, der ihm im umgeformten Syſtem entſpricht, zu ſetzen brauchte (25).

Man weiſs z. B., daſs in jedem Dreyecke, wo man einen Perpendikel aus einem Winkel auf die gegenüberſtehende Seite fallen lieſs, wenn dieſer Perpendikel auf die Seite ſelbſt fällt, folgendes Verhältniſs hat.

Die Seite, auf welche der Perpendikel herabgelaſſen iſt, verhält ſich zu der Summe der beyden

andern Seiten, wie der Unterſchied dieſer beyden andern Seiten ſich zum Unterſchied der Segmente verhält.

Aus dieſem Verhältniſs erhalte ich für das Urſyſtem

$$\overline{BC} : \overline{AB} + \overline{AC} = \overline{AB} - \overline{AC} : \overline{BD} - \overline{CD}.$$

Um dieſs Verhältniſs auf das umgeformte Syſtem anzuwenden, ſetze ich die aus der Tafel genommenen correlativen Werthe darin, ſie haben alle + als Zeichen der Correlation, ausgenommen $\overline{C'D'}$. Ich verändere alſo bloſs das Zeichen von $\overline{C'D'}$ und mein Verhältniſs wird:

$$\overline{B'C'} : \overline{A'B'} + \overline{A'C'} = \overline{A'B'} - \overline{A'C'} : \overline{B'D'} + \overline{C'D'}.$$

Man hat alſo, wenn der Perpendikel auſserhalb des Dreyecks fällt, folgendes Verhältniſs:

Die Seite, auf welche der Perpendikel fällt, verhält ſich zur Summe der beyden andern Seiten wie der Unterſchied dieſer Seiten zur Summe der Segmente.

Derſelbe Fall würde mit jedem neuen Dreyecke eintreten, auf das man dieſelben Formeln anwenden wollte: man brauchte nur, wie ich gezeigt habe, die Correlation der beyden Syſteme aufzuſtellen, welche offenbar direkt ſeyn wird, wenn der Perpendikel des neuen Dreyecks auf die ihm gegenüberſtehende Seite ſelbſt fällt, und indirekt, wenn dieſer Perpendikel nur auf die Verlängerung dieſer Seite fällt.

In dieſem letzten Fall könnte man als Urſyſtem das annehmen, was ich als umgeformtes Syſtem betrachtet habe; d. h. dieſs als Maaſsſtab zur Vergleichung für das neue Dreyeck nehmen, ſo wird die Correla-

tion direkt ſeyn; d. h. die Zeichen werden dieſelben in den Formeln des neuen Syſtems ſeyn, die ſie in den Formeln ſind, welche wir für das eben betrachtete Syſtem $A' B' C' D'$ gefunden haben.

87. Zwey gerade Linien, die ſich ſchneiden, bilden vier verſchiedene Winkel, die man ja nicht verwechſeln muſs, wenn man zwey oder mehr correlative Figuren vergleicht. Deswegen will ich mich jetzt mit der Art beſchäftigen, wie man den Unterſchied dieſer Winkel in der Rechnung anzeigen kann.

Gleich anfangs zeige ich die Richtung einer geraden Linie an, indem ich zwey beliebige Punkte dieſer geraden Linie nenne, und den zuerſt ſetze, von dem man annimmt, daſs er die Linie durch ſeine Bewegung gezogen habe. So, wenn man annimmt, daſs der Punkt *m* (*Fig.* 11.) durch ſeine Bewegung eine gerade Linie beſchrieben habe, indem er von *m* nach *n* ging, zeigt $\overline{mn}$ das an, was ich die Richtung dieſer geraden Linie nenne, und *m*, was ich unter dem Ausdruck, erſter Punkt oder Entſtehungspunkt, bezeichne. Im Gegentheil bezeichnet $\overline{nm}$ die diametral entgegengeſetzte Richtung.

Ich ſage, daſs zwey gerade Linien in derſelben Richtung gezogen ſind, wenn ſie parallel ſind, und noch mehr, wenn man ihre Richtungen in einander fallen laſſen kann, wenn man ſich vorſtellt, daſs eine von den beyden, parallel mit ſich ſelbſt, ſich ſo bewege, daſs ihr Entſtehungspunkt in den Entſtehungspunkt der andern falle.

Durch den Winkel, den zwey beliebige gerade Linien bilden, wenn ſie von einem Punkte ausgehen, verſtehe ich bloſs den Winkel, den in der That ihre Richtungen bilden, indem ich den ihnen gemeinſchaftlichen Punkt als Entſtehungspunkt einer jeden annehme. Wenn $\overline{nn'}$ und $\overline{pp'}$ ſich in m durchſchneiden und ich den Winkel $n\hat{m}p$ bezeichnen will, ſo nenne ich ihn den durch $\overline{mn}$, $\overline{mp}$ gebildeten Winkel, nicht durch $\overline{mn}$, $\overline{pm}$, und eben ſo wenig durch $\overline{nm}$ und $\overline{mp}$ gebildet. Er wird bezeichnet

$$n\hat{m}p \text{ oder } \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{mp}.$$

Hierdurch kann man die vier Winkel, welche die geraden Linien $\overline{nn'}$, $\overline{pp'}$ bilden, leicht unterſcheiden, weil nach dem vorigen Begriff man

$$n\hat{m}p \mp \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{mp} \text{ hat, und}$$
$$n\hat{m}p' \mp \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{mp'}$$
$$p'\hat{m}n' \mp \overline{mp'}\,\hat{}\,\overline{mn'}$$
$$p\,\hat{m}\,n' \mp \overline{mp}\,\hat{}\,\overline{mn'}.$$

Weil die Scheitelwinkel gleich ſind, ſo hat man z. B. $n\hat{m}p = p'\hat{m}n'$, und folglich $\overline{mn}\,\hat{}\,\overline{mp} = \overline{mp'}\,\hat{}\,\overline{mn'}$. So ſind dieſe beyden Winkel, in Hinſicht auf ihre abſoluten Werthe, identiſch, aber nicht in Hinſicht auf ihre Stellung.

Zwey Nebenwinkel im Gegentheil ſind wechſelſeitige Supplemente. So hat man

$$\overline{mn}\,\hat{}\,\overline{mp'} = 2\pi - \overline{mn}\,\hat{}\,\overline{mp},$$

wenn man den vierten Theil des Umkreiſes oder den rechten Winkel π nennt.

Statt die vorigen Winkel, wie eben geſagt iſt, zu bezeichnen, indem man immer vom Durchſchnittspunkte m ausgeht, kann man auf folgende Art den

Ausdruck allgemeiner machen. Um den Winkel $n\hat{m}p$ zu bezeichnen, ſchreibt man überhaupt

$$\overline{n'n}\ \overline{p'p},$$

indem man n' willkührlich auf der Richtung $\overline{mn}$, und p' willkührlich auf der Richtung $\overline{mp}$ annimmt, doch ſo, daſs die Richtungen $\overline{n'n'}$, $\overline{p'p'}$ dieſelben ſeyen, als $\overline{mn}$, $\overline{mp}$. So werden die vier Winkel, die durch die zwey geraden Linien $\overline{nn'}$, $\overline{pp'}$ gebildet werden, ſo unterſchieden,

$$n\hat{m}p \ddagger \overline{n'n}{}^{\wedge}\overline{p'p}$$
$$n\hat{m}p' \ddagger \overline{n'n}{}^{\wedge}\overline{pp'}$$
$$p'\hat{m}n' \ddagger \overline{pp}{}^{\wedge}\overline{nn'}$$
$$p\hat{m}n' \ddagger \overline{p'p}{}^{\wedge}\overline{nn'}.$$

Ich dehne dieſe Begriffe auf den Fall aus, wenn die verglichenen geraden Linien nicht in einer Ebene ſeyn ſollten, dann nenne ich den Winkel, der durch dieſe beyden Linien gebildet wird, den, der zwiſchen zwey andern geraden Linien ſtatt hätte, die nach der Richtung der erſten, von irgend einem im Raum angenommenen Punkte aus, gezogen würden.

Ueberhaupt, wenn man zwey im Raum gezogene Linien durch $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ bezeichnet, ſo wird der Winkel, den ſie bilden, durch $\overline{AB}{}^{\wedge}\overline{CD}$ bezeichnet, der ihm gleiche Scheitelwinkel durch $\overline{BA}{}^{\wedge}\overline{DC}$, und die zwey Supplementswinkel, die auch gleich ſind, durch $\overline{AB}{}^{\wedge}\overline{DC}$ und $\overline{BA}{}^{\wedge}\overline{CD}$. Man hat alſo immer, wenn der rechte Winkel π heiſst,

$$\overline{AB}{}^{\wedge}\overline{CD} = \overline{BA}{}^{\wedge}\overline{DC}$$
$$\overline{AB}{}^{\wedge}\overline{DC} = \overline{BA}{}^{\wedge}\overline{CD}$$
$$\overline{AB}{}^{\wedge}\overline{CD} + \overline{AB}{}^{\wedge}\overline{DC} = 2\pi$$
$$\overline{AB}{}^{\wedge}\overline{CD} + \overline{BA}{}^{\wedge}\overline{CD} = 2\pi.$$

Alle diese Gleichungen entstehen augenscheinlich durch einen einfachen Mechanismus in der systematischen Anordnung und Versetzung der Buchstaben, durch den man, wenn man mit ihm vertraut geworden ist, der Mühe überhoben wird, die Augen so oft auf die Figur zu werfen. Nun weiss man, dass es ein grosser Vortheil der Analysis ist, dass, wenn einmal die Quantitäten durch Buchstaben oder sonstige Charaktere bezeichnet sind, man sich nicht mehr mit der vorgestellten Sache selbst, sondern nur mit ihrem Symbol zu beschäftigen braucht.

Es ist klar, dass man dieselben Begriffe auf Winkel, die durch beliebige Ebenen gebildet sind, anwenden kann, indem man diese Ebenen durch gerade Linien, die in ihnen selbst gezogen sind, bezeichnet, und welche aus einem Punkte ihres gemeinschaftlichen Durchschnitts perpendikular auf diesem Durchschnitte selbst errichtet sind.

88. Da wir oft Gelegenheit haben werden, von den Winkeln zu sprechen, welche die Seiten eines Vielecks unter sich selbst oder mit festen Linien bilden, die als Maasstab zur Vergleichung angenommen sind, so ist es nothwendig, in dieser Hinsicht die nöthigen Erklärungen zu geben, um jeder Zweydeutigkeit zuvor zu kommen.

Man hat angenommen, dass, wenn man bloss von den Winkeln eines Vielecks spricht, man immer die versteht, die zwey an einander liegende Seiten bilden, indem man als den Entstehungspunkt von jedem den ihnen gemeinschaftlichen Punkt annimmt.

So ſind im Vieleck $ABCDE$ (*Fig.* 12.) die Winkel des Vielecks

$$\overline{AB}\,^\wedge\,\overline{AE}$$

$$\overline{BA}\,^\wedge\,\overline{BC} \text{ u. ſ. w.}$$

Aber man muſs dieſe Winkel des Vielecks von denen unterſcheiden, die ich Winkel durch die Richtung des Umfanges gebildet nennen werde, ſie mögen dieſs nun durch die Seiten unter einander, oder durch die Seiten und eine feſte gerade Linie ſeyn, die als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen iſt.

Hier muſs man ſich vorſtellen, daſs ein beweglicher Punkt, indem er von einem Scheitel des Vielecks, z. B. A, ausgeht, das Vieleck beſchreibe, wobey er immer der Richtung des Umfangs folgt, bis er wieder zu dem Scheitel gekommen iſt, von dem er ausging, dann ſchreibt man jeder der Seiten die Richtung des beſchreibenden Punktes zu, und der Winkel, den die Richtungen zweyer Seiten ſo genommen bilden, heiſst der Winkel nach der Richtung des Umfangs. So iſt z. B. der Winkel nach der Richtung des Umfangs, von den Seiten, die ſich in B ſchneiden, gebildet, nicht $A\hat{B}C$, welches der Vieleckswinkel iſt; ſondern $A'\hat{B}C'$, welcher durch die Richtungen $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ gebildet iſt, oder

$$\overline{AB}\,^\wedge\,\overline{BC} = 2\pi - \overline{BA}\,^\wedge\,\overline{BC}.$$

Man ſieht alſo, daſs in einem Vieleck, welches keine zurückgehende Winkel hat, der nach der Richtung des Umfangs gebildete Winkel, das Supplement des Vieleckswinkels, oder das, was man äuſseren Winkel nennt, iſt.

Der Unterſchied zwiſchen Vieleckswinkel und dem Winkel nach der Richtung des Umfangs findet bey allen Arten von Vielecken ſtatt; die Winkel mögen austretend oder zurückgehend, das Vieleck mag eben oder gebogen ſeyn, d. h. ſeine Seiten mögen in derſelben Ebene liegen oder nicht. Eben ſo verſteht man, was der Winkel durch zwey Seiten gebildet ſagen will, dieſe Seiten mögen an einander liegen oder durch andere getrennt ſeyn, die folglich nicht in derſelben Ebene ſeyn können.

Der Winkel nach der Richtung des Umfangs durch die verſchiedenen Seiten des Vielecks und eine beliebige feſte gerade Linie gebildet, heiſst der, der ſtatt haben würde, wenn man ſich durch den Entſtehungspunkt dieſer feſten geraden Linie eine mit dieſer Seite parallel laufende Linie gezogen vorſtellte, die zugleich nach derſelben Richtung liefe, welche man ſich als die des Umfangs vorſtellt. Dieſe Richtung des Umfangs iſt willkührlich gewählt; iſt ſie aber einmal beſtimmt, ſo muſs ſie dieſelbe für alle Seiten des Vielecks ſeyn, eben ſo wie die gerade Linie, die man als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen hat.

Man kann auch als feſte Linie eine von den Seiten des Vielecks ſelbſt nehmen, aber dann muſs man immer einen Unterſchied machen, zwiſchen der Richtung dieſer Linie, wenn man ſie als Maaſsſtab zur Vergleichung betrachtet, und derſelben Linie, wenn man ſie als Seite des Vielecks betrachtet; denn man kann die Richtung des Umfangs ohne die Richtung der feſten Linie ändern, und umgekehrt. So kann

diese feste Linie und die Seite des Vielecks, auf der sie genommen ist, nach Gefallen entweder nach einer und derselben oder nach einer diametral entgegengesetzten Richtung gehen.

89. Wenn ich in der Folge von dem Winkel sprechen werde, welcher durch die Seiten des Vielecks unter sich oder mit andern festen Linien gebildet wird, so verstehe ich immer den Vieleckswinkel darunter, d. h. den Winkel, der durch diese beyden Linien gebildet wird, wenn man ihren Durchschnittspunkt als den Entstehungspunkt einer jeden ansieht. Will ich den Winkel bezeichnen, der durch diese Linien nach der Richtung des Umfangs gebildet wird, so werde ich es ausdrücklich anzeigen.

90. Wenn von den Winkeln die Rede ist, die durch zwey auf einander folgende Seitenflächen eines Polyeders gebildet werden, so muss man sich aus einem beliebigen Punkte der gemeinschaftlichen Kante zwey Perpendikularlinien gezogen vorstellen, die eine in der ersten Seitenfläche, die andere in der zweyten. Der Winkel, der durch diese Linien gebildet wird, wenn man den Durchschnittspunkt als Entstehungspunkt einer jeden betrachtet, ist der Winkel des Polyeders, und sein Supplement wird der Winkel seyn, welcher durch die beyden Seitenflächen nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders gebildet wird.

Oder was auf eins hinauskommt, man muss die innere Wand des Polyeders von seiner äusseren unterscheiden. Der Winkel, der durch die beyden inneren Wände des Polyeders gebildet wird, wenn man als

Entſtehungslinie ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitt annimmt, iſt der Winkel des Polyeders, und ſein Supplement iſt der Winkel, welcher nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders gebildet iſt.

Man kann dieſs für die Einbildungskraft deutlicher machen, wenn man z. B. ſich vorſtellt, daſs die innere Wand des Polyeders weiſs, und die äuſseren Seitenflächen ſchwarz ſind, und daſs jede Seitenfläche in's Unendliche verlängert in ihrer ganzen Ausdehnung immer dieſelbe Farbe an derſelben Seite behalte. Dann iſt der Winkel des Polyeders derjenige, der durch die weiſsen Flächen gebildet wird, wenn man ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitt als die Entſtehungslinie beyder annimmt; und der Winkel nach der Richtung der Oberflächen des Polyeders derjenige, welcher durch eine weiſse und eine ſchwarze Fläche gebildet wird, indem man immer annimmt, daſs dieſe Farben nach der Reihe genommen ſind, ohne von den Ebenen unterbrochen zu ſeyn, und daſs ihr Durchſchnitt die Entſtehungslinie der verglichenen Oberflächen ſey.

Auf dieſe Art wird man leichter begreifen, was ein Winkel ſey, der durch zwey nicht auf einander folgende Seitenflächen gebildet wird, es mag ein Winkel des Polyeders, oder ein Winkel nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders ſeyn. Eben derſelbe Fall iſt es mit den Winkeln, die durch die Seitenflächen des Polyeders und eine beliebige feſte Ebene gebildet werden, welche man als Maaſsſtab zur Vergleichung annimmt. Man kann irgend eine Seite dieſer feſten unbeſtimmten Ebene ſich weiſs

vorſtellen, und die andere ſchwarz, dann verſteht man unter den Winkeln, die jede der Seitenflächen mit der feſten Ebene bildet, diejenigen, die durch ihre weiſsen Oberflächen gebildet werden, welche nicht durch Ebenen unterbrochen ſind, wobey man ihren gemeinſchaftlichen Durchſchnitt als Entſtehungslinie annimmt. Die Winkel durch die Seitenflächen mit der feſten Ebene, nach der Richtung der Oberfläche des Polyeders gebildet, werden die ſeyn, welche zwiſchen der weiſsen Oberfläche der Ebene und den ſchwarzen Seitenflächen des Polyeders begriffen ſind.

Wie man auch dieſe Unterſchiede erkläre, ſo ſind ſie durchaus nöthig, um nicht die Winkel, von denen man ſprechen will, mit ihren Supplementen zu verwechſeln. Jetzt wollen wir an einigen Beyſpielen den Gebrauch zeigen, den man von den Charakteren oder angenommenen Zeichen, die vorher erklärt ſind, machen kann, um die Verhältniſſe der Stellung zwiſchen den verſchiedenen Theilen derſelben Figur und den Theilen verſchiedener correlativen Figuren unter ſich auszudrücken.

Erſte Aufgabe.

91. Die Correlationen der Conſtruktion und der Stellung, welche zwiſchen zwey beliebigen Dreyecken eintreten, darzuſtellen (*Fig.* 13 u. 14.); und zwar ſo, daſs man für eine dieſer Figuren paſſende Formeln gehörig modificiren könne, damit ſie auf die andern anwendbar werden.

Wir

Wir wollen das Dreyeck ABC als Maaſsſtab zur Vergleichung annehmen, und die Punkte A, B, C, die es beſtimmen, in einer beliebigen Ordnung ſchreiben, unter ihnen ebenfalls in beliebiger Ordnung die Punkte M, N, P, die das zweyte beſtimmen, z. B. ſo:

1ſtes Syſtem ABC

2tes Syſtem MNP

ſo iſt offenbar die Correlation der Conſtruktion dargeſtellt, und hieraus folgt, daſs man dieſe Correlation auf ſo viel verſchiedene Arten darſtellen kann, als es verſchiedene Arten giebt, die drey Buchſtaben M, N, P den drey Buchſtaben A, B, C entſprechend zu machen, d. h. auf ſechs Arten.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo dargeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe leicht daraus, weil, um z. B. die gerade Linie zu finden, die im zweyten Syſtem der geraden Linie $\overline{AC}$ des erſten entſpricht, man nur die beyden Punkte M, P zu nehmen braucht, die wechſelſeitig den Punkten A, C des erſten entſprechen, d. h. daſs $\overline{MP}$ der Linie $\overline{AC}$ entſpricht. Gleichfalls hat der Winkel $B\hat{A}C$ den entſprechenden Winkel $N\hat{M}P$. Eben ſo iſt es mit den andern.

Es bleibt alſo nur übrig, die Correlation der Stellung aufzuſtellen, von welcher die der Zeichen abhängt. Aber es iſt augenſcheinlich, daſs die Correlation zweyer beliebigen einfachen Dreyecke, wie wir ſie betrachten, d. h. ohne zugefügte Linien (wie z. B. die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten ſeyn würden), immer direkt ſeyn muſs, weil eines von den Dreyecken ſich immer

durch unmerkbare Stufen in das andere verwandeln kann, ohne dafs eins von den fechs zu betrachtenden Dingen durch 0 oder durch ∞ gehe; denn um diefe Veränderung zu bewerkftelligen, braucht man offenbar nur die Seiten gehörig zu vermehren oder zu vermindern.

Alfo find die Formeln, welche die Trigonometrie zur Berechnung eines Dreyecks giebt, auf alle möglichen Dreyecke ohne Veränderung der Zeichen anwendbar, vorausgefetzt, dafs man nur die fechs Dinge, welche bey diefem einfachen Dreyecke zu betrachten find, in die Rechnung bringe, und nicht z. B. die Perpendikel oder die Winkel, welche die Perpendikel mit den anliegenden Seiten bilden.

Man kann auch bemerken, dafs jedes Dreyeck mit fich felbft auf drey verfchiedene Arten durch den Weg der Correlation verglichen werden kann, denn wir können für das Dreyeck *ABC* folgende drey correlative Syfteme auffstellen:

1ftes Syftem *ABC*
2tes Syftem *BAC*
3tes Syftem *ACB*.

Zweyte Aufgabe.

92. Die Correlationen der Conftruktion und der Stellung zwifchen zwey Dreyecken *ABCD*, *MNPQ* (*Fig.* 15 u. 16.) aufzuftellen, in deren jedem ein Perpendikel $\overline{AD}$, $\overline{MQ}$ aus einem Winkel auf die gegenüberftehende Seite gefenkt ift.

Wir wollen die Figur *ABCD* als Maasſtab zur Vergleichung nehmen, und nach der Ordnung der Conſtruktion die vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D*, die die erſte Figur beſtimmen, hinſchreiben; d. h. erſt in einer beliebigen Ordnung die drey Scheitelpunkte *A*, *B*, *C*, indem man z. B. von *A* anfängt, dann *B*, und dann *C*, und zuletzt den Punkt *D* ſetzt, wo der Perpendikel auf die entgegengeſetzte Seite *BC* fällt.

Darunter wollen wir die entſprechenden Buchſtaben der correlativen Figur *MNPQ* ſchreiben; indem wir derſelben Ordnung der Conſtruktion folgen, oder vom Punkte *M* anfangen, von dem der Perpendikel herabgelaſſen iſt, dann zu *N*, dann zu *P*, und endlich zu *Q* gehen, wo der Perpendikel auf die gegenüberſtehende Seite fällt, wie in der Urfigur.

Dieſe Anordnung giebt uns augenſcheinlich die Correlation der Conſtruktion der beyden Figuren, wie folgt:

1ſtes Syſtem *ABCD*
2tes Syſtem *MNPQ*.

Statt *N* als den *B* entſprechenden, *P* als den *C* entſprechenden Punkt zu betrachten, hätten wir auch augenſcheinlich *P* als den *B* entſprechenden, und *N* als den *C* entſprechenden Punkt betrachten können, woraus zwey Arten, dieſe Correlation darzuſtellen, entſtehen. Der Rechner kann die wählen, durch welche er, in jedem beſondern Falle, am geradeſten ſein Ziel erreicht.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo aufgeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe ohne Schwierigkeit

daraus, weil die correlativen Theile der beyden Figuren augenfcheinlich durch die fich entfprechenden Punkte beftimmt find.

Es bleibt alfo die Darftellung der Correlation der Stellung übrig, oder, was auf eins hinaus kommt, die der Zeichen; aber in den beyden verglichenen Figuren ift es deutlich, dafs die fich entfprechenden Punkte in derfelben Ordnung auf ihren jedesmaligen Linien ftehen. Die Correlation ift alfo direkt, und folglich die Formeln, welche Eigenfchaften des erften Syftems ausdrücken, werden, ohne Veränderung der Zeichen, auf das zweyte anwendbar feyn, und man braucht nie, um diefe Anwendung ins Werk zu ftellen, in diefe Formeln die abfoluten Werthe des zweyten für die ihm entfprechenden Werthe des erften zu fetzen, vorausgefetzt, dafs man in der Rechnung nur Gröfsen brauche, die wirklich einen Theil jedes Syftems ausmachen.

Wenn aber im correlativen Syfteme der Perpendikel, nicht wie im Urfyfteme, zwifchen die Punkte, welche B und C entfprechen, fällt, wenn zum Beyfpiel das correlative Syftem $M' N' P' Q'$ würde (*Fig.* 17.), fo wären die entfprechenden Punkte nicht mehr nach derfelben Ordnung auf ihren correlativen Linien geftellt, und die Correlation würde indirekt feyn. Um fie zu finden, ftelle ich zuerft die neue Correlation der Conftruktion dar:

1ftes Syftem $ABCD$

2tes Syftem $M'N'P'Q'$.

Nachher um meine Arbeit zu erleichtern, entwerfe ich eine neue Figur gleich $M'N'P'Q'$ (*Fig.* 18.),

der ich diefelben Buchftaben wie der Urfigur beyfetze, blofs accentuirt, um ihren Unterfchied unter einerley Benennungen beyzubehalten. Die Correlation der Conftruktion wird alfo

1ftes Syftem $ABCD$

2tes Syftem $A'B'C'D'$.

Zwifchen diefen beyden Syftemen foll man jetzt die Correlation der Stellung oder Zeichen aufftellen. Aber das ift fchon (86) gefchehen.

Wir brauchen alfo nur, um die Arbeit zu vollenden, in der gefundenen Tafel (86) für die Buchftaben A', B', C', D', die, deren Stelle fie einnehmen, zu fetzen, d. h. M', N', P', Q'. Alfo endlich ift die gefuchte Correlation unter den Dreyecken $ABCD$ und $M'N'P'Q'$ folgende:

$$\begin{array}{l} \text{1ftes Syftem} \\ \text{2tes Syftem} \end{array} \begin{cases} +\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{BD}+\overline{CD} \\ +\overline{M'N'}+\overline{M'P'}+\overline{N'P'}+\overline{N'Q'}-\overline{P'Q'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\overline{AD}+B\hat{A}C+A\hat{B}C+A\hat{C}D+B\hat{A}D \\ +\overline{M'Q'}+N'\hat{M}'P'+M'\hat{N}'P'+M'\hat{P}'Q'+N'\hat{M}'Q' \end{cases}$$

$$\begin{cases} +C\hat{A}D+\overline{\overline{ABC}}+\overline{\overline{ABD}}+\overline{\overline{ACD}}. \\ -P'\hat{M}'Q'+\overline{\overline{M'N'P'}}+\overline{\overline{M'N'Q'}}-\overline{\overline{M'P'Q'}}. \end{cases}$$

Aus diefer Tafel fieht man, was man in die Formeln, welche die Eigenfchaften des Urfyftems $ABCD$ angeben, fetzen mufs, um fie auf das indirekt correlative Syftem $M'N'P'Q'$ anwendbar zu machen.

93. Man fieht aus diefer Tafel, dafs von allen Quantitäten, die das Syftem $M'N'P'Q'$ ausmachen, nur drey invers werden, oder deren Werthe die Zeichen verändern, nämlich $\overline{P'Q'}$, $P'\hat{M}'Q'$, $\overline{\overline{M'P'Q'}}$;

alſo wenn man eine neue Figur beſchreibt (*Fig.* 19.), durchaus *M'N'P'Q'* gleich, und ihr dieſelben Buchſtaben *A*, *B*, *C*, *D*, wie in der Urfigur ſetzt, jeden an die Stelle des ihm entſprechenden, ſo braucht man nur, um die Formeln dieſer Urfigur *ABCD* (*Fig.* 15.), auf die indirekt correlative Figur *ABCD* (*Fig.* 19.) anzuwenden, in dieſen Formeln die Zeichen dreyer Quantitäten zu verändern, nämlich von $\overline{CD}$, $C\hat{A}D$ und $\overline{ACD}$ (25).

Hat man einmal durch die bloſse Veränderung der Zeichen dieſer drey Quantitäten die auf das zweyte Syſtem *ABCD* (*Fig.* 19.) anwendbaren Formeln, ſo wird es leicht ſeyn, die für das Syſtem *M'*, *N'*, *P'*, *Q'* zu finden. Denn weil dieſes und das zweyte Syſtem *ABCD* (*Fig.* 19.) ſich dann in direkter Correlation unter einander befinden, ſo braucht man, um die Formeln des einen auf das andere anzuwenden, gar keine Veränderung der Zeichen vorzunehmen, ſondern bloſs die abſoluten Werthe des zweyten für die des erſten zu ſetzen, d. h. die Punkte des einen für die entſprechenden Punkte des andern, ohne irgend eine Veränderung der Zeichen.

Dritte Aufgabe.

94. Die Correlationen der Conſtruktion und der Stellung zwiſchen den zwey Dreyecken *ABCDFG* und *MNPQRS* (*Fig.* 20. 21. 22.) aufzuſtellen, wo in jedem, Perpendikel aus zwey beliebigen Winkeln,

auf die jedesmaligen gegenüberstehenden Seiten gesenkt sind.

Wir wollen als Maasstab zur Vergleichung (*Fig.* 20.) *ABCDFG* annehmen, wo ich voraussetze, dass das Dreyeck *ABC* seine drey spitzen Winkel habe, und dann wollen wir nach der Reihe die Punkte, die es bestimmen, nach der Ordnung der Construktion hinschreiben; d. h. erst die drey Scheitelpunkte des Dreyecks *ABC* in einer beliebigen Ordnung, z. B. *A*, *B*, *C*; dann den Punkt *D*, wo sich die beyden Perpendikel durchschneiden, und endlich die Punkte *F*, *G* der Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, auf welche die Perpendikel aus den gegenüberstehenden Winkeln fallen.

Darunter wollen wir die entsprechenden Buchstaben der correlativen Figur setzen, indem wir von *M* anfangen, welcher offenbar dem Punkte *A* entsprechen muss, und dann willkührlich den Punkt *N*, oder den Punkt *P* stellen, damit er *B* entspreche, hier z. B. den ersten; darauf nehmen wir den Punkt *P* als entsprechenden für *C*; dann den Punkt *Q*, wo sich die Perpendikel durchschneiden, als entsprechenden Punkt für *D*, und endlich die Punkte *R*, *S*, um den Punkten *F*, *G* zu entsprechen. Denn weil man in der Urfigur $F \ddagger \overline{AB} \cdot \overline{CD}$ hat, so muss der correlative Punkt von *F* im neuen Systeme der seyn, wo die beyden $\overline{AB}$ und $\overline{CD}$ correlativen Linien zusammenstofsen; aber nach der Hypothese entspricht *A* dem Punkte *M*, *B* dem Punkte *N*; also $\overline{AB}$ der Linie $\overline{MN}$. Eben so sieht man, dass, da *P* dem Punkte *C*, und *Q* dem Punkte *D* entspricht, $\overline{PQ}$ auch der Linie

$\overline{CD}$ entſpreche; alſo $\overline{MN} \cdot \overline{PQ}$ oder R entſpricht $\overline{AB} \cdot \overline{CD}$ oder F; alſo muſs R unter F, und aus demſelben Grunde S unter G geſchrieben werden.

Alſo iſt ſchon die Correlation der Conſtruktion beyder Figuren folgende:

1ſtes Syſtem $ABCDFG$

2tes Syſtem $MNPQRS$.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo dargeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe leicht, weil die correlativen Theile augenſcheinlich durch die ſich entſprechenden Punkte beſtimmt ſind. Es bleibt alſo noch übrig die Correlation der Stellung, oder was eins iſt, die der Zeichen darzuſtellen.

Im Urſyſtem ſetzt man voraus, daſs die drey Winkel ſpitzig ſind, alſo will ich nicht den Fall unterſuchen, wann dieſelbe Sache bey'm umgeformten correlativen Syſtem MNP (*Fig.* 21.) ſtatt hat, weil dann die Correlation augenſcheinlich direkt iſt, und die Verrichtung gar keine Schwierigkeiten hat. Aber der Winkel $N\hat{M}P$ kann ſtumpf ſeyn, oder einer von den andern Winkeln $M\hat{N}P$, $M\hat{P}N$, aus welchen die Perpendikel geſenkt ſind. Dieſe beyden Fälle will ich nach der Reihe unterſuchen.

Ich ſtelle mir alſo zuerſt vor, daſs $N\hat{M}P$ ſtumpf ſey (*Fig.* 22.). Um meine Arbeit zu erleichtern, entwerfe ich (*Fig.* 23.) eine neue Figur, der correlativen Figur gleich, zu der ich die accentuirten Buchſtaben der Urfigur ſetze. Man kann auch dieſe accentuirten Buchſtaben in die correlative Figur ſelbſt den ihnen entſprechenden Buchſtaben zur Seite ſchreiben, d. h. A' zur Seite von M u. ſ. w. Jetzt ſoll man alſo die

Correlation der Zeichen zwiſchen folgenden beyden Syſtemen aufſtellen:

1ſtes Syſtem $ABCDFG$

2tes Syſtem $A'B'C'D'F'G'$.

Hierzu zähle ich erſt die Quantitäten auf, die ich in die Tafel der Correlation bringen will. Wir wollen uns mit folgenden begnügen:

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{FD}$, $\overline{GD}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{D}C$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$, $C\hat{B}D$.

Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir eine ſtufenweiſe Bewegung vor, durch die das Urſyſtem ſich in das correlative verwandelt. Ich nehme z. B. an, daſs dieſe Umformung durch eine Bewegung des Punktes A gegen D auf der Linie $\overline{AD}$ geſchieht, welche ſie vereinigt, ſo daſs, nachdem die beyden Punkte in einander gefallen ſind, die Bewegung fortgehe, und daſs ſie die Stellungen unter einander auswechſeln. Iſt dieſs geſchehen, ſo braucht man ſich nur eine ſtufenweiſe Veränderung der abſoluten Werthe vorzuſtellen, wodurch nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert wird, damit ſich die beyden Figuren einander decken können.

Ich nehme alſo an, daſs dieſe Veränderung bewirkt ſey, und unterſuche zuerſt, welche von den vorher aufgezählten Quantitäten bey dieſer Bewegung, welche das Urſyſtem mit dem correlativen identiſch macht, weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind, (denn dieſe würden direkt geblieben ſeyn, und man weiſs ſchon, daſs das Zeichen der Correlation einer jeden + iſt.

Nun ist es sichtbar, dass nach der vorausgesetzten Bewegung der Umformung $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, BF, $\overline{CG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{D}C$, $B\hat{C}D$, $C\hat{B}D$ weder durch o noch durch ∞ gegangen sind. So bleiben also die sechs Quantitäten $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{FD}$, $\overline{GD}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$ nach, die wohl invers geworden seyn könnten.

Um der Einbildungskraft bey der angezeigten Verrichtung zu Hülfe zu kommen, braucht man nur die Figur in einer Stellung zu betrachten, die der unendlich nahe ist, wo der Uebergang des ersten Systems zum zweyten geschieht; dann wird man leicht sehen, welche von diesen Quantitäten der Durchgang verschwinden läst oder sie unendlich macht, und welche endlich bleiben müssen. So im gegenwärtigen Beyspiel betrachte ich die Figur in dem Augenblicke, wo A nahe dabey ist in D zu fallen (*Fig.* 20.). Die Stellung von A sey dann a, und eben so f, g die Stellungen von F, G; so ist es offenbar, dass die Quantitäten, die sich dann unendlich klein finden, und die folglich beym Durchgang verschwinden müssen (d. h. in dem Augenblicke, wo a, welches A vorstellt, in D fällt) $\overline{af}$, $\overline{ag}$, $\overline{fD}$, $\overline{gD}$, $a\hat{B}D$ und $a\hat{C}D$ seyn werden. Setzen wir also wieder für a, f, g die Buchstaben A, F, G, welche sie vorstellen, so wird man sehen, dass dem gemäss, was ich gesagt habe, die Quantitäten, welche durch die Veränderung invers werden können, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{FD}$, $\overline{GD}$, $A\hat{B}D$ und $A\hat{C}D$ sind. Ich will jede von ihnen besonders untersuchen, um zu sehen, was sie geworden ist.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF}$, im umgeformten im Gegentheil $\overline{A'F'} = \overline{B'F'} - \overline{A'B'}$; alſo iſt $\overline{A'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{AG} = \overline{AC} - \overline{CG}$, im umgeformten $\overline{A'G'} = \overline{C'G'} - \overline{A'C'}$; alſo iſt $\overline{A'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{FD} = \overline{CF} - \overline{CD}$, im umgeformten $\overline{F'D'} = \overline{C'D'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{F'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

4) Im Urſyſtem hat man $\overline{GD} = \overline{BG} - \overline{BD}$, im umgeformten $\overline{G'D'} = \overline{B'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{G'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

5) Im Urſyſtem hat man $A\hat{B}D = A\hat{B}C - D\hat{B}C$, im umgeformten $A'\hat{B}'D' = D'\hat{B}'C' - A'\hat{B}'C'$; alſo iſt $A'\hat{B}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

6) Im Urſyſtem hat man $A\hat{C}D = A\hat{C}B - D\hat{C}B$, im umgeformten $A'\hat{C}'D' = D'\hat{C}'B' - A'\hat{C}'B'$; alſo iſt $A'\hat{C}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDFG$ und $A'B'C'D'F'G'$ aufgeſtellt. Setzt man für das letztere Buchſtabe für Buchſtabe das Syſtem $MNPQRS$, ſo erhalten wir folgende allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den Figuren $ABCDFG$ und $MNPQRS$:

$$\begin{array}{ll} \text{1stes System} & \left\{\begin{array}{l} +\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AF}+\overline{AG} \\ +\overline{MN}+\overline{MP}+\overline{NP}-\overline{MR}-\overline{MS} \end{array}\right. \\ \text{2tes System} & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\overline{BF}+\overline{CG}+\overline{BG}+\overline{CF}+\overline{BD}+\overline{CD}+\overline{FD} \\ +\overline{NR}+\overline{PS}+\overline{NS}+\overline{PR}+\overline{NQ}+\overline{PQ}-\overline{RQ} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\overline{GD}+B\hat{A}C+A\hat{B}C+A\hat{C}B+B\hat{D}C+A\hat{B}D \\ -\overline{SQ}+N\hat{M}P+M\hat{N}P+M\hat{P}N+N\hat{Q}P-M\hat{N}Q \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} +A\hat{C}D+B\hat{C}D+C\hat{B}D. \\ -M\hat{P}Q+N\hat{P}Q+P\hat{N}Q. \end{array}\right.$$

Diese Tafel drückt also die Substitutionen aus, die man in den Formeln des Ursystems $ABCDFG$ machen muss, damit sie anwendbar auf das correlative System $MNPQRS$ werden, wenn der Winkel $N\hat{M}P$ des Dreyecks MNP stumpf ist, da alle Winkel im entsprechenden Dreyecke ABC spitzig sind.

Giebt man dem correlativen System dieselben Buchstaben wie dem Ursystem (*Fig.* 23. *), so wird man sehen, dass, um die Formeln von diesem auf das andere anzuwenden, man nur in diesen Formeln die Zeichen von sechs Quantitäten zu verändern braucht, nämlich $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{FD}$, $\overline{GD}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$; indem wir immer annehmen, dass in diesen Formeln keine anderen Quantitäten kommen, als die, deren Aufzählung bey der allgemeinen Tafel der Correlation vorkam.

95. Wir müssen jetzt den zweyten Fall untersuchen, d. h. den, wenn einer von den andern Winkeln $M\hat{N}P$, $M\hat{P}N$ stumpf ist. Das neue System ist (*Fig.* 24) vorgestellt, wo man z. B. annimmt, dass $M\hat{N}P > \pi$.

Ich verfahre wie oben, bis nach der Aufzählung der Quantitäten, die in die Tafel der Correlation kommen sollen.

Ist diess geschehen, so stelle ich mir eine stufenweise Veränderung vor, wodurch das Ursystem in das correlative System fällt. Ich bilde mir z. B. ein, dass die gerade Linie $\overline{AB}$ sich um den Punkt B so drehe, dass der Winkel $A\hat{B}C$ immer zunimmt, bis er grösser wird wie ein Rechter. Man sieht leicht ein, dass während dieser Bewegung die Linie CF, die nach der Construktion immer perpendikulair auf $\overline{AB}$ bleibt, sich in einem fort der Linie $\overline{CB}$ nähert, indem sie sich um den Punkt C dreht; dass ferner in dem Augenblicke, wo $A\hat{B}C = \pi$, $\overline{CF}$ in $\overline{CB}$ fällt, und dass endlich, wenn $A\hat{B}C$ stumpf geworden ist, $\overline{CF}$ unter $\overline{CB}$ geht; so dass das System die (*Fig.* 24 u. 25.) vorgestellte Form annehmen wird. So ist nichts übrig, damit das neue System und das Ursystem einander decken, als eine passende stufenweise Veränderung der absoluten Werthe anzunehmen, wodurch nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert wird.

Ich stelle mir also diese Veränderung schon als geschehen vor, und sehe dann erst, welche von den aufgezählten Quantitäten bey dieser Bewegung, welche das Ursystem mit dem correlativen identisch gemacht hat, weder durch o noch durch ∞ gegangen sind; denn diese werden direkt geblieben seyn, und man weiss schon, dass ihr Zeichen der Correlation + ist.

Nun kann man leicht durch den vorher angezeigten Gang ſehen (94), daſs die Quantitäten, welche kraft dieſer Bewegung der Umformung weder durch o noch durch ∞ gingen, folgende ſind, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{CG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$, $\overline{CD}$, $\overline{GD}$, $B\hat{A}C$, $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $B\hat{D}C$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $C\hat{B}D$. Es bleiben nur die Quantitäten $\overline{BF}$, $\overline{BD}$, $\overline{FD}$, $B\hat{C}D$ nach, die, da ſie durch o gegangen ſind, invers geworden ſeyn könnten. Ich unterſuche alſo nach der Reihe, was jede von ihnen insbeſondere geworden iſt.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{BF} = \overline{AB} - \overline{AF}$, im umgeformten $\overline{B'F'} = \overline{A'F'} - \overline{A'B'}$; alſo iſt $\overline{B'F'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{BD} = \overline{BG} - \overline{GD}$, im umgeformten $\overline{B'D'} = \overline{G'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{B'D'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{FD} = \overline{CF} - \overline{CD}$, im umgeformten $\overline{F'D'} = \overline{C'D'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{F'D'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

4) Im Urſyſtem hat man $B\hat{C}D = A\hat{C}B - A\hat{C}D$, und im correlativen Syſtem $B'\hat{C'}D' = A'\hat{C'}D' - A\hat{C}B$; alſo iſt $B'\hat{C'}D'$ invers und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den Syſtemen *ABCDFG* und *A'B'C'D'F'G'* dargeſtellt. Setzt man nun dafür Buchſtabe für Buchſtabe, das Syſtem *M'N'P'Q'R'S'*, ſo haben wir folgende allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den beyden Syſtemen *ABCDFG* und *M'N'P'Q'R'S'* (*Fig.* 20 u. 24.).

1ſtes Syſtem $\;+\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AF}+\overline{AG}$

2tes Syſtem $\;+\overline{M'N'}+\overline{M'P'}+\overline{N'P'}+\overline{M'R'}+\overline{M'S'}$

$$\begin{cases} +\overline{BF}+\overline{CG}+\overline{BG}+\overline{CF}+\overline{BD}+\overline{CD} \\ -\overline{N'R'}+\overline{P'S'}+\overline{N'S'}+\overline{P'R'}-\overline{N'Q'}+\overline{P'Q'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\overline{FD}+\overline{GD}+B\hat{A}C+A\hat{B}C+A\hat{C}B \\ -\overline{R'Q'}+\overline{S'Q'}+N'\hat{M'}P'+M'\hat{N'}P'+M'\hat{P'}N' \end{cases}$$

$$\begin{cases} +B\hat{D}C+A\hat{B}D+A\hat{C}D+B\hat{C}D+C\hat{B}D. \\ +N'\hat{Q'}P'+M'\hat{N'}Q'+M'\hat{P'}Q'+N'\hat{P'}Q'+P'\hat{N'}Q'. \end{cases}$$

Dieſe Tafel drückt alſo die Subſtitutionen aus, die man in den Formeln, welche die Eigenſchaften des Urſyſtems ausdrücken, vornehmen muſs, um ſie auf das indirekt correlative Syſtem $M'N'P'Q'R'S'$ anwendbar zu machen, von denen das erſte lauter ſpitze Winkel, und das letzte den Winkel $M'N'P'$ ſtumpf hat.

Giebt man dieſem correlativen Syſteme dieſelben Buchſtaben wie dem Urſyſteme, ſo ſieht man, daſs, um die Formeln des (*Fig.* 20.) vorgeſtellten auf das (*Fig.* 26.) vorgeſtellte anwendbar zu machen, man nur in dieſen Formeln die Zeichen der vier Quantitäten $\overline{BF}$, $\overline{BD}$, $\overline{FD}$, $B\hat{C}D$ zu verändern braucht. Aus denſelben Gründen, um die Formeln deſſelben Urſyſtems auf das indirekt correlative Syſtem $ABCDFG$ (*Fig.* 27.) anwendbar zu machen, wo der Winkel ACB ſtumpf iſt, braucht man nur in den Formeln die Zeichen der vier Quantitäten $\overline{CG}$, $\overline{CD}$, $\overline{GD}$, $C\hat{B}D$ zu verändern.

96. Man kann alſo zwiſchen den vier dargeſtellten Syſtemen (*Fig.* 20. 23. 26. 27.) folgende Cor-

relation aufſtellen, in welcher man der Kürze halber alle Ausdrücke, welche in den vier Syſtemen daſſelbe Zeichen behalten, weggelaſſen hat. *Fig.* 20. iſt als Urſyſtem angenommen, wo man alle Winkel ſpitzig vorausſetzt, *Fig.* 23.* als zweytes, wo $B\hat{A}C > \pi$, *Fig.* 26. als drittes, wo $A\hat{B}C > \pi$, *Fig.* 27. als viertes, wo $A\hat{C}B > \pi$.

Allgemeine Correlation der vier dargeſtellten Syſteme (*Fig.* 20. 23. 26. 27.):

1ſtes Syſtem	$+\overline{AF}+\overline{AG}+\overline{BF}+\overline{CG}+\overline{BD}+\overline{CD}$	$+\overline{FD}+\overline{GD}+A\hat{B}D+A\hat{C}D+B\hat{C}D+C\hat{B}D.$
2tes Syſtem	$-\overline{AF}-\overline{AG}+\overline{BF}+\overline{CG}+\overline{BD}+\overline{CD}$	$-\overline{FD}-\overline{GD}-A\hat{B}D-A\hat{C}D+B\hat{C}D+C\hat{B}D.$
3tes Syſtem	$+\overline{AF}+\overline{AG}-\overline{BF}+\overline{CG}-\overline{BD}+\overline{CD}$	$-\overline{FD}+\overline{GD}+A\hat{B}D+A\hat{C}D-B\hat{C}D+C\hat{B}D.$
4tes Syſtem	$+\overline{AF}+\overline{AG}+\overline{BF}-\overline{CG}+\overline{BD}-\overline{CD}$	$+\overline{FD}-\overline{GD}+A\hat{B}D+A\hat{C}D+B\hat{C}D-C\hat{B}D.$

Vermittelſt dieſer allgemeinen Tafel der Correlation zwiſchen den vier Syſtemen ſieht man ſogleich, wenn die Formeln für irgend eins von ihnen gegeben ſind, welche Veränderungen man in den Zeichen machen muſs, um ſie auf ein anderes anwenden zu können, weil man nur die Zeichen zu verändern braucht, welche man aus der vorhergehenden Tafel für beyde Syſteme nicht dieſelben findet.

Welches andere Dreyeck man auch vornehmen wolle, ſo wird es immer leicht ſeyn, ſeine direkte Correlation mit einem von den vorigen vier Syſtemen darzu-

darzustellen, und folglich nachher die auf dasselbe unmittelbar anwendbaren Formeln zu finden.

Vierte Aufgabe.

97. Die Correlationen der Construktion und der Stellung darzustellen, welche zwischen zwey Dreyecken *ABCDFGH* und *MNPQRST* statt haben (*Fig.* 28 u. 29.), wo in jedem die Perpendikel aus jedem Winkel auf die gegenüberstehende Seite gesenkt sind.

Ich nehme als Maafsstab zur Vergleichung das Dreyeck *ABCDFGH*, wo ich voraussetze, dafs das Dreyeck *ABC* drey spitzige Winkel habe. Ich schreibe die Punkte, welche diese Figur bestimmen, nach der Reihe in einer beliebigen Ordnung, aber so viel wie möglich nach der Ordnung der Construktion, welche die natürlichste und leichteste ist, d. h. erst die drey Scheitelpunkte *A*, *B*, *C*, dann den Punkt *D*, wo sich die drey Perpendikel schneiden *), und endlich die drey Punkte *F*, *G*, *H* auf den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, auf welche die aus den gegenüberstehenden Winkeln gesenkten Perpendikel fallen.

Unter diesen ersten Buchstaben, mit denen man die Urfigur bezeichnet, schreibe ich die entsprechenden Buchstaben der correlativen Figur, indem ich beliebig von *M*, *N* oder *P*, hier z. B. von *M*, anfange, welches *A* entsprechen soll; dann willkührlich

*) Man wird (129) beweisen, dafs die drey Perpendikel sich in einem Punkte schneiden.

A. d. Verf.

mit N oder P fortfahre, hier mit N, welches B entſprechen ſoll. Nachher ſetze ich P, dann Q, dann R, dann S, dann T. Daſs die Buchſtaben P, Q, R, S, T ſo geſetzt werden müſſen, beweiſe ich ſo:

MNP iſt nach der Hypotheſe die vorgegebene mit ABC correlative Figur; hat man alſo M als A, N als B entſprechend genommen, ſo muſs P auch C entſprechen.

D iſt in der erſten Figur der Punkt, wo ſich die drey Perpendikel ſchneiden, und Q der, wo ſie ſich in der correlativen Figur ſchneiden, alſo entſpricht Q dem Punkte D.

Dieſs angenommen, ſo haben wir $F \ddagger \overline{AB} \cdot \overline{CD}$, alſo der F entſprechende Punkt iſt derjenige, wo ſich die Linien, welche $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ entſprechen, ſchneiden, d. h. (weil M, N, P, Q den Punkten A, B, C, D entſprechen, wie man geſehen hat) $\overline{MN} \cdot \overline{PQ}$. Dieſer Punkt iſt nun R, alſo entſpricht R dem Punkte F. Eben ſo, weil $G \ddagger \overline{AC} \cdot \overline{BD}$, wird der ihm entſprechende Punkt $\overline{MP} \cdot \overline{NQ} \ddagger S$, und auf gleiche Art, weil $H \ddagger \overline{AD} \cdot \overline{BC}$, wird der H entſprechende Punkt $\overline{MQ} \cdot \overline{NP} \ddagger T$ ſeyn. Alſo iſt die Correlation der Conſtruktion folgende:

1ſtes Syſtem $A\,B\,C\,D\,F\,G\,H$

2tes Syſtem $M\,N\,P\,Q\,R\,S\,T$.

Iſt ſo die Correlation der Conſtruktion dargeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe ohne Schwierigkeit, weil die correlativen Theile der beyden Figuren augenſcheinlich durch die entſprechenden Punkte beſtimmt ſind. Es bleibt uns alſo übrig die Correlation der Stellung oder die der Zeichen aufzuſtellen.

Nun nimmt man im Urſyſtem an, daſs jeder der drey Winkel kleiner als ein Rechter ſey. Ich will alſo nicht den Fall unterſuchen, wo daſſelbe im correlativen Dreyeck *MNP* eintritt, weil dann die Correlation augenſcheinlich direkt iſt, und die Verrichtung gar keine Schwierigkeiten hat. Aber ein Winkel kann auch ſtumpf ſeyn. Alſo unterſuche ich nur den Fall, wenn einer von den drey Winkeln $N\hat{M}P$, $M\hat{N}P$, $M\hat{P}N$ ſtumpf iſt.

Ich nehme z. B. an, daſs der Winkel $N\hat{M}P$ ſtumpf ſey; um meine Arbeit zu erleichtern, entwerfe ich eine neue Figur (*Fig.* 30.), gleich der vorgegebenen correlativen Figur, und ſetze die Buchſtaben der Urfigur in ſie hinein, nur zum Unterſchiede accentuirt, ſonſt unter einerley Benennung, oder man kann, was noch bequemer iſt, dieſelben Buchſtaben in die correlative Figur ſelbſt ſchreiben, indem man ſie bey den ihnen entſprechenden ſetzt, d. h. A' bey M, B' bey N u. ſ. w. Man hat jetzt alſo die Correlation der Stellung zwiſchen den zwey folgenden Syſtemen aufzuſtellen:

1ſtes Syſtem $A\ B\ C\ D\ F\ G\ H$.

2tes Syſtem $A'B'C'D'F'G'H'$.

Hierzu rechne ich vorerſt die Quantitäten auf, die ich in die Tafel der Correlation bringen will. Wir wollen uns mit folgenden begnügen:

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{BG}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}D$, $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$, $A\hat{D}B$, $A\hat{D}C$, $B\hat{D}C$.

Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir im Urſyſtem eine ſtufenweiſe Bewegung vor, vermöge deren dieſs Syſtem ſich in das correlative verwandelt; z. B. ich ſtelle mir vor, daſs A und D ihre Stellungen austauſchen, indem ſich A nach H, und D in entgegengeſetzter Richtung bewegt. Nach dieſer Verwechſelung der Stellen braucht man nur eine Veränderung durch unmerkbare Grade in den abſoluten Werthen vorauszuſetzen, um die Urfigur dahin zu bringen, daſs ſie ganz die correlative Figur decken, wodurch nichts an der Correlation der Zeichen verändert wird.

Ich ſetze alſo voraus, daſs wirklich dieſe Veränderung ſo geſchehen ſey, daſs beyde Syſteme einander decken, und unterſuche zuerſt, welches in dieſem Augenblicke die Quantitäten ſind unter den vorher aufgezählten, die weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind; denn dieſe ſind direkt geblieben, und man weiſs, daſs ihr Zeichen der Correlation $+$ iſt.

Nun iſt es leicht zu ſehen, daſs, nach der Bewegung der Umformung, die Quantitäten, welche nicht durch o oder durch ∞ gegangen ſind, folgende ſind:

$$\overline{AB},\ \overline{AC},\ \overline{BC},\ \overline{BD},\ \overline{CD},\ \overline{AH},\ \overline{BH},\ \overline{CH},\ \overline{DH},\ \overline{BF},$$
$$\overline{CF},\ \overline{BG},\ \overline{CG},\ B\hat{A}C,\ B\hat{A}D,\ C\hat{A}D,\ A\hat{B}C,\ C\hat{B}D,$$
$$A\hat{C}B,\ B\hat{C}D,\ A\hat{D}B,\ A\hat{D}C,\ B\hat{D}C.$$

Es bleiben alſo nur die ſieben Quantitäten noch, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, die, da ſie durch o gegangen ſind, invers ſeyn könnten. Ich unterſuche alſo nach der Reihe, was jede von ihnen insbeſondere wird.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{AD} = \overline{AH} - \overline{DH}$, im umgeformten $\overline{A'D'} = \overline{D'H'} - \overline{A'H'}$; alſo iſt $\overline{A'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{AF} = \overline{AB} - \overline{BF}$, im umgeformten $\overline{A'F'} = \overline{B'F'} - \overline{A'B'}$; alſo iſt $\overline{A'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{DF} = \overline{CF} - \overline{DC}$, im umgeformten $\overline{D'F'} = \overline{D'C'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{D'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

4) Im Urſyſtem hat man $\overline{AG} = \overline{AC} - \overline{GC}$, im umgeformten $\overline{A'G'} = \overline{G'C'} - \overline{A'C'}$; alſo iſt $\overline{A'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

5) Im Urſyſtem hat man $\overline{DG} = \overline{BG} - \overline{BD}$, im umgeformten $\overline{D'G'} = \overline{B'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{D'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

6) Im Urſyſtem hat man $A\hat{B}D = A\hat{B}C - C\hat{B}D$, im umgeformten $A'\hat{B}'D' = C'\hat{B}'D' - A'\hat{B}'C'$; alſo iſt $A'\hat{B}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

7) Im Urſyſtem hat man $A\hat{C}D = A\hat{C}B - B\hat{C}D$, im umgeformten $A'\hat{C}'D' = B'\hat{C}'D' - A'\hat{C}'B'$; alſo iſt $A'\hat{C}'D'$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den Syſtemen $ABCDFGH$ und $A'B'C'D'F'G'H'$ hergeſtellt. Setzen wir alſo dafür, Buchſtabe für Buch-

ſtabe das vorgegebene Syſtem *MNPQRST*, ſo haben wir die allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den beyden Syſtemen *ABCDFGH* und *MNPQRST*:

$$\begin{array}{ll} \text{1ſtes Syſtem} & \left\{\begin{array}{l} +\overline{AB}+\overline{AC}+\overline{BC}+\overline{AD}+\overline{BD} \\ +\overline{MN}+\overline{MP}+\overline{NP}-\overline{MQ}+\overline{NQ} \end{array}\right. \\ \text{2tes Syſtem} & \end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\overline{CD}+\overline{AH}+\overline{BH}+\overline{CH}+\overline{DH}+\overline{AF}+\overline{BF} \\ +\overline{PQ}+\overline{MT}+\overline{NT}+\overline{PT}+\overline{QT}-\overline{MR}+\overline{NR} \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} +\overline{CF}+\overline{DF}+\overline{AG}+\overline{BG}+\overline{CG}+\overline{DG}+B\hat{A}C \\ +\overline{PR}-\overline{QR}-\overline{MS}+\overline{NS}+\overline{PS}-\overline{QS}+N\hat{M}P \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} +B\hat{A}D+C\hat{A}D+A\hat{B}C+A\hat{B}D+C\hat{B}D+A\hat{C}B \\ +N\hat{M}Q+P\hat{M}Q+M\hat{N}P-M\hat{N}Q+P\hat{N}Q+M\hat{P}N \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l} +A\hat{C}D+B\hat{C}D+A\hat{D}B+A\hat{D}C+B\hat{D}C. \\ -M\hat{P}Q+N\hat{P}Q+M\hat{Q}N+M\hat{Q}P+N\hat{Q}P. \end{array}\right.$$

Dieſe Tafel drückt alſo die Subſtitutionen aus, die man in den Formeln des Urſyſtems *ABCDFGH* machen muſs, wo man annimmt, daſs die drey Winkel, jeder kleiner als ein Rechter ſind, um dieſe Formeln auf das correlative Syſtem *MNPQRST* anwendbar zu machen, in dem die drey Winkel des Dreyecks *MNP* denen des Dreyecks *ABC* entſprechen, und $N\hat{M}P$, welcher $B\hat{A}C$ entſpricht, ſtumpf angenommen wird.

98. Giebt man dem correlativen Syſtem dieſelben Buchſtaben, als dem Urſyſtem (*Fig.* 31.), ſo wird man ſehen, daſs, um die Formeln dieſes auf das andere anzuwenden, man nur in den Formeln die Zeichen der ſieben Quantitäten $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$ zu verändern braucht.

Aus denselben Gründen müſste man, wenn $A\hat{B}C > \pi$ (*Fig.* 32.), die Zeichen folgender sieben Quantitäten in den Formeln des Urſyſtems verändern, um dieſe Formeln auf das umgeformte anwendbar zu machen, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $B\hat{C}D$, $B\hat{A}D$.

Endlich würde der Winkel $A\hat{C}B$ ſtumpf (*Fig.* 33.), ſo müſste man bey den ſieben folgenden Quantitäten die Zeichen in den Formeln des Urſyſtems ändern, um dieſe Formeln auf das neue Syſtem anwendbar zu machen, $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$.

Man kann alſo zwiſchen den vier dargeſtellten Syſtemen (*Fig.* 28. 31. 32. 33.) folgende Correlation aufſtellen, in welcher man, um ſie abzukürzen, die Ausdrücke weggelaſſen hat, welche in den vier Syſtemen daſſelbe Zeichen behalten. Man ſetzt voraus, daſs das als Urſyſtem angenommene Dreyeck (*Fig.* 28.) drey ſpitze Winkel habe; das zweyte (*Fig.* 31.) $B\hat{A}C > \pi$; das dritte (*Fig.* 32.) $A\hat{B}C > \pi$; und das vierte (*Fig.* 33.) $A\hat{C}B > \pi$.

Allgemeine Correlation der vier dargeſtellten Syſteme (*Fig.* 28. 31. 32. 33.):

1ſtes Syſtem	$+\overline{AD}$	$+\overline{BD}$	$+\overline{CD}$	$+\overline{BH}$	$+\overline{CH}$
2tes Syſtem	$-\overline{AD}$	$+\overline{BD}$	$+\overline{CD}$	$+\overline{BH}$	$+\overline{CH}$
3tes Syſtem	$+\overline{AD}$	$-\overline{BD}$	$+\overline{CD}$	$-\overline{BH}$	$+\overline{CH}$
4tes Syſtem	$+\overline{AD}$	$+\overline{BD}$	$-\overline{CD}$	$+\overline{BH}$	$-\overline{CH}$

$+\overline{DH}$	$+\overline{AF}$	$+\overline{BF}$	$+\overline{DF}$	$+\overline{AG}$	$+\overline{CG}$	$+\overline{DG}$
$+\overline{DH}$	$-\overline{AF}$	$+\overline{BF}$	$-\overline{DF}$	$-\overline{AG}$	$+\overline{CG}$	$-\overline{DG}$
$-\overline{DH}$	$+\overline{AF}$	$-\overline{BF}$	$-\overline{DF}$	$+\overline{AG}$	$+\overline{CG}$	$+\overline{DG}$
$-\overline{DH}$	$+\overline{AF}$	$+\overline{BF}$	$+\overline{DF}$	$+\overline{AG}$	$-\overline{CG}$	$-\overline{DG}$

$$\begin{cases} + B\hat{A}D + C\hat{A}D + A\hat{B}D + C\hat{B}D + A\hat{C}D + B\hat{C}D. \\ + B\hat{A}D + C\hat{A}D - A\hat{B}D + C\hat{B}D - A\hat{C}D + B\hat{C}D. \\ + B\hat{A}D - C\hat{A}D + ABD + C\hat{B}D + A\hat{C}D - B\hat{C}D. \\ - B\hat{A}D - C\hat{A}D + A\hat{B}D - C\hat{B}D + A\hat{C}D + B\hat{C}D. \end{cases}$$

Vermittelſt dieſer allgemeinen Tafel der Correlation zwiſchen den vier Syſtemen, ſieht man ſogleich, wenn die Formeln für eins von ihnen gegeben ſind, welche Veränderungen man in den Zeichen zu machen habe, um ſie auf ein anderes anzuwenden, weil man nur die Zeichen zu verändern braucht, die nach der Tafel in den verglichenen Syſtemen nicht dieſelben ſind.

Welches andere Dreyeck man auch vornehme, ſo wird es immer leicht ſeyn, ſeine direkte Correlation mit einem der vier vorigen Syſteme darzuſtellen und folglich die Formeln zu finden, die auf daſſelbe unmittelbar anwendbar ſind.

Fünfte Aufgabe.

99. Vier beliebige Punkte, *A*, *B*, *C*, *D*, liegen in derſelben Ebene, und ſind zwey und zwey mit einander durch gerade Linien verbunden, die bis an ihren jedesmaligen Durchſchnitt gehen. Die Correlation der Conſtruktion und Stellung ſoll dargeſtellt werden, die zwiſchen allen Figuren ſtatt hat, welche aus der Vereinigung dieſer ſechs Linien entſpringen, nach den verſchiedenen Stellungen, welche die

Punkte *A*, *B*, *C*, *D* annehmen können (*Fig.* 34.).

Man sieht leicht, daſs man die aufgegebenen Figuren auf drey bringen kann, denn die Punkte *A*, *B*, *C*, *D* können gestellt werden,

1) daſs die vier auf einander folgenden Linien $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CA}$ eine vierseitige Figur mit ausgehenden Winkeln bilden (*Fig.* 34.) und zwischen sich einen an einander hängenden Raum einnehmen;

2) daſs ein einwärts gehender Winkel da ist (*Fig.* 36.);

3) daſs die vier Linien $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CA}$ zwey am Scheitel entgegengesetzte Dreyecke *ABG*, *CDG* bilden (*Fig.* 38.). Aber man kann immer diesen Figuren den Namen „vierseitige" geben, weil sie alle aus der Vereinigung vier gerader Linien entstehen, und man von der einen zur andern durch die fortwährende Bewegung der vier Scheitelpunkte gehen kann.

Dieſs festgesetzt, so nehme ich willkührlich eine von diesen vierseitigen Figuren, z. B. die (*Fig.* 34.) Maaſsstab zur Vergleichung an, und stelle nach der Reihe ihre Correlation mit den beyden andern dar. Wir wollen mit der vierseitigen Figur mit einwärts gehendem Winkel (*Fig.* 36.) anfangen. Ich accentuire (*Fig.* 35.) die Buchstaben dieses correlativen Systems, um sie von denen des Ursystems unterscheiden zu können.

Nach dem, was bey den vorigen Beyspielen gesagt ist, kann man leicht sehen, daſs dieselben Buch-

ſtaben in den zwey Figuren an die ſich entſprechenden Punkte geſtellt ſind, denn z. B. man hat im erſten Syſtem $F \ddagger \overline{AB} \cdot \overline{CD}$, und eben ſo im zweyten $F' \ddagger \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}$; auf gleiche Art $G \ddagger \overline{AC} \cdot \overline{BD}$ und $G' \ddagger \overline{A'C'} \cdot \overline{B'D'}$ u. ſ. w., wir haben alſo ſchon folgende Correlation der Conſtruktion:

1ſtes Syſtem $A\ B\ C\ D\ F\ G\ H$

2tes Syſtem $A'B'C'D'F'G'H'$.

Iſt die Correlation der Conſtruktion ſo aufgeſtellt, ſo folgt die der abſoluten Werthe ohne Schwierigkeit, weil die correlativen Theile der beyden Figuren augenſcheinlich durch die ſich entſprechenden Punkte beſtimmt ſind. Es bleibt alſo nur übrig, die Correlation der Stellung oder die der Zeichen darzuſtellen. Deswegen rechne ich gleich anfangs die Quantitäten auf, die ich in die Tafel der Correlation bringen will. Wir wollen uns auf folgende beſchränken: $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AF}$, $\overline{BF}$, $\overline{AG}$, $\overline{CG}$, $\overline{AH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{BG}$, $\overline{DG}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}D$, $C\hat{B}F$, $D\hat{B}F$, $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}D$, $B\hat{C}G$, $D\hat{C}G$, $B\hat{D}A$, $C\hat{B}A$, $B\hat{D}C$, $B\hat{D}F$, $C\hat{D}G$, $A\hat{D}F$, $A\hat{D}G$, $F\hat{D}G$, $A\hat{H}B$, $A\hat{H}C$, $A\hat{F}D$, $A\hat{G}D$.

Iſt dieſs geſchehen, ſo ſtelle ich mir im Urſyſtem eine ſtufenweiſe Bewegung vor, vermöge derer ſich dieſes Syſtem in das correlative Syſtem umformt. Z. B. ich ſtelle mir vor, daſs der Punkt D ſich gegen A bewege, bis er durch den Punkt H gegangen iſt, indem die Punkte A, B, C feſt bleiben. Hier iſt es deutlich, daſs F und G ſich in derſelben Zeit auf den jedesmaligen Linien $\overline{FA}$, $\overline{GA}$ gegen A bewegen und in dem Augenblicke in B und C fallen werden, wo D

ſich auf $\overline{BC}$ befindet, und daſs ſie endlich ſich beyderſeitig zwiſchen A und B, und A und C ſtellen werden. Nachher braucht man nur eine ſtufenweiſe Veränderung in den abſoluten Werthen anzunehmen, damit die Urfigur ganz in die correlative falle, welches nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert.

Ich nehme alſo an, daſs in der That dieſe Veränderung ſtatt gehabt habe, ſo daſs beyde Syſteme ſich decken, und unterſuche zuerſt, welche von den vorher aufgerechneten Quantitäten weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind; denn dieſe werden direkt geblieben ſeyn, und man weiſs ſchon, daſs das Zeichen der Correlation für jede + iſt.

Folgt man dem in den vorhergehenden Beyſpielen angezeigten Gange, ſo wird man leicht ſehen, daſs folgende Quantitäten, wie D in $\overline{BC}$ fiel, weder durch o noch durch ∞ gegangen ſind.

$\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, $\overline{AF}$, $\overline{AG}$, $\overline{AH}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{BG}$, $\overline{DG}$, $\overline{CF}$, $\overline{DF}$, $B\hat{A}C$, $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{B}C$, $A\hat{B}D$, $C\hat{B}F$, $D\hat{B}F$, $A\hat{C}B$, $A\hat{C}D$, $B\hat{C}G$, $D\hat{C}G$, $B\hat{D}A$, $C\hat{B}A$, $B\hat{D}C$, $A\hat{D}F$, $A\hat{D}G$, $F\hat{D}G$, $A\hat{H}B$, $A\hat{H}C$, $A\hat{F}D$, $A\hat{G}D$. Es bleiben alſo nur noch die ſieben Quantitäten

$\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $C\hat{B}D$, $B\hat{C}D$, $B\hat{D}F$, $C\hat{D}G$,

nach, die, da ſie durch o gegangen ſind, in meinem Syſteme invers ſeyn könnten. Ich unterſuche alſo, was jede insbeſondere wird.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{BF} = \overline{AF} - \overline{AB}$, im umgeformten $\overline{B'F'} = \overline{A'B'} - \overline{A'F'}$; alſo iſt

$\overline{B'F'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation ist —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{CG} = \overline{AG} - \overline{AC}$, im umgeformten $\overline{C'G'} = \overline{A'C'} - \overline{A'G'}$; alſo iſt $\overline{C'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH}$, im umgeformten $\overline{D'H'} = \overline{A'H'} - \overline{A'D'}$; alſo iſt $\overline{D'H'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation iſt —.

4) Im Urſyſtem hat man $C\hat{B}D = A\hat{B}D - A\hat{B}C$, im umgeformten $C'\hat{B'}D' = A'\hat{B'}C' - A'\hat{B'}D'$; alſo iſt $C'\hat{B'}D'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

5) Im Urſyſtem hat man $B\hat{C}D = A\hat{C}D - A\hat{C}B$, im umgeformten $B'\hat{C'}D' = A'\hat{C'}B' - A'\hat{C'}D'$; alſo iſt $B'\hat{C'}D'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

6) Im Urſyſtem hat man $B\hat{D}F = A\hat{D}F - A\hat{D}B$, im umgeformten $B'\hat{D'}F' = A'\hat{D'}B' - A'\hat{D'}F'$; alſo iſt $B'\hat{D'}F'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

7) Im Urſyſtem hat man $C\hat{D}G = A\hat{D}G - A\hat{D}C$, im umgeformten $C'\hat{D'}G' = A'\hat{D'}C' - A'\hat{D'}G'$; alſo iſt $C'\hat{D'}G'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation iſt —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen zwiſchen den beyden Syſtemen *ABCDFGH* (*Fig.* 34.) und *A'B'C'D'F'G'H'* (*Fig.* 35.) ganz hergeſtellt; und ſo erhält man ohne Schwierigkeit die geſuchte allgemeine Tafel der Correlation.

100. Setzt man dieselben Buchstaben in beyde Systeme, oder unterdrückt nur die Accente des ersten, so sieht man, dass, um die Formeln des Ursystems auf das correlative anwendbar zu machen, man nur in diesen Formeln die Zeichen der sieben Quantitäten $\overline{BF}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $C\hat{B}D$, $B\hat{C}D$, $B\hat{D}F$, $C\hat{D}G$ zu ändern braucht.

101. Ich will jetzt den Fall untersuchen, wo die vier auf einander folgenden Seiten des Vierecks $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{CA}$ (*Fig.* 38.) zwey Dreyecke bilden, die sich am Scheitel entgegengesetzt sind.

Ich verfahre wie vorher, bis nach Aufrechnung der Quantitäten, die in die Tafel der Correlation kommen sollen. Ist diess geschehen, so stelle ich mir im Ursystem eine stufenweise Bewegung vor, vermöge deren dieses System sich in das correlative (*Fig.* 37.) verwandelt. Z. B. ich stelle mir vor, dass C und D ihre Plätze austauschen durch eine stetige Bewegung von C gegen F, bis jenseits des Punktes D, wobey die Punkte A, B, D, F fest bleiben. Nachher braucht man sich nur eine stufenweise Veränderung in den absoluten Werthen vorzustellen, damit die Urfigur ganz in die correlative falle, welches nichts mehr an der Correlation der Zeichen verändert.

Ich setze also voraus, dass diese Veränderung in der That so vorgegangen sey, dass die beyden Systeme einander decken, und untersuche, welche von den vorher aufgezählten Quantitäten durch o oder durch ∞ gegangen sind: denn das sind die einzigen, die invers seyn können; und man weiss schon, dass das Zeichen der Correlation einer jeden andern + ist.

Folgt man dem bey den vorigen Beyſpielen angezeigten Gange, ſo ſieht man leicht, daſs die einzigen Quantitäten, die, da ſie durch o gingen, invers werden konnten, die ſieben folgenden ſind: $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DG}$, $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$. Ich unterſuche alſo, was jede von ihnen insbeſondere wird.

1) Im Urſyſtem hat man $\overline{CD} = \overline{CF} - \overline{FD}$, im umgeformten $\overline{C'D'} = \overline{F'D'} - \overline{C'F'}$; alſo iſt $\overline{C'D'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{CG} = \overline{AC} - \overline{AG}$, im umgeformten $\overline{C'G'} = \overline{A'G'} - \overline{A'C'}$; alſo iſt $\overline{C'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

3) Im Urſyſtem hat man $\overline{DH} = \overline{AD} - \overline{AH}$, im umgeformten $\overline{D'H'} = \overline{A'H'} - \overline{A'D'}$; alſo iſt $\overline{D'H'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

4) Im Urſyſtem hat man $\overline{CH} = \overline{BC} - \overline{BH}$, im umgeformten $\overline{C'H'} = \overline{B'H'} - \overline{B'C'}$; alſo iſt $\overline{C'H'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

5) Im Urſyſtem hat man $\overline{DG} = \overline{BG} - \overline{BD}$, im umgeformten $\overline{D'G'} = \overline{B'D'} - \overline{B'G'}$; alſo iſt $\overline{D'G'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

6) Im Urſyſtem hat man $C\hat{A}D = B\hat{A}C - B\hat{A}D$, im umgeformten $C'\hat{A}'D' = B'\hat{A}'D' - B'\hat{A}'C'$; alſo iſt $C'\hat{A}'B'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation —.

7) Im Urſyſtem hat man $C\hat{B}D = A\hat{B}D - A\hat{B}C$, im umgeformten $C'\hat{B'}D' = A'\hat{B'}C' - A'\hat{B'}D'$; alſo iſt $A'\hat{B'}D'$ invers, und ſein Zeichen der Correlation —.

Hier iſt alſo die Correlation der Zeichen zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDFGH$ (*Fig.* 34.) und $A'B'C'D'F'G'H'$ (*Fig.* 37.) ganz dargeſtellt, und man kann ohne Schwierigkeit die geſuchte allgemeine Tafel der Correlation erhalten.

102. Setzt man dieſelben Buchſtaben in beyde Syſteme (*Fig.* 34 u. 38.) oder nimmt nur die Accente des zweyten weg, ſo wird man ſehen, daſs, um die Formeln des Urſyſtems (*Fig.* 34.) auf das umgeformte (*Fig.* 38.) anwendbar zu machen, man nur in dieſen Formeln die Zeichen der ſieben Quantitäten $\overline{CD}$, $\overline{CG}$, $\overline{DH}$, $\overline{CH}$, $\overline{DG}$, $C\hat{A}B$, $C\hat{B}D$ zu ändern braucht.

Man kann alſo folgende Correlation zwiſchen den drey dargeſtellten Syſtemen (*Fig.* 34. 36. 38.) gründen, in welcher man, der Kürze wegen, alle Ausdrücke unterdrückt hat, die in den drey Syſtemen daſſelbe Zeichen behalten.

Allgemeine Correlation der drey dargeſtellten Syſteme (*Fig.* 34. 36. 38.).

$$\begin{array}{l} \text{1ſtes Syſtem} \\ \text{2tes Syſtem} \\ \text{3tes Syſtem} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + \overline{CD} + \overline{BF} + \overline{CG} + \overline{DH} + \overline{CH} + \overline{DG} \\ + \overline{CD} - \overline{BF} - \overline{CG} - \overline{DH} + \overline{CH} + \overline{DG} \\ - \overline{CD} + \overline{BF} - \overline{CG} - \overline{DH} - \overline{CH} - \overline{DG} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} + C\hat{A}D + C\hat{B}D + B\hat{C}D + B\hat{D}F + C\hat{D}G. \\ + C\hat{A}D - C\hat{B}D - B\hat{C}D - B\hat{D}F - C\hat{D}G. \\ - C\hat{A}D - C\hat{B}D + B\hat{C}D + B\hat{D}F + C\hat{D}G. \end{array} \right.$$

Vermittelſt dieſer allgemeinen Tafel der Correlation zwiſchen den drey Syſtemen ſieht man gleich, welche Veränderungen man in den Zeichen machen muſs, um die für das eine gegebenen Formeln auf das andere anzuwenden, weil nur die Zeichen geändert zu werden brauchen, die in der vorigen Tafel für die verglichenen Syſteme nicht dieſelben ſind.

Welche andere vierſeitige Figur man auch aufgebe, ſo wird es immer leicht ſeyn, ihre direkte Correlation mit einem der vorigen Syſteme darzuſtellen, und folglich die Formeln zu finden, die auf ſie unmittelbar anwendbar ſind.

103. Ich gab die allgemeine Benennung vierſeitig den drey Figuren (34, 36, 38), die jede aus der Vereinigung derſelben vier Linien *AB*, *BD*, *DC*, *CA* beſtehen, weil dieſs in der That drey correlative Figuren ſind, die aus der ſtufenweiſen Bewegung der Punkte *A*, *B*, *C*, *D* entſtehen, und die weſentlich dieſelben Eigenſchaften haben; da, wie man geſehen hat, wenn die Eigenſchaften einer von den dreyen durch Formeln ausgedrückt ſind, man nur in dieſen Formeln das Zeichen einiger Quantitäten zu ändern braucht, um ſie auf jede der andern beyden anwendbar zu machen. Ich werde vollſtändige vierſeitige Figur die Vereinigung der drey einfachen nennen, d. h. die Vereinigung der vier Linien *AB*, *DB*, *DC*, *CA* bis auf ihr jedesmaliges Zuſammentreffen verlängert.

Nimmt man alſo vier willkührliche Punkte an, *A*, *B*, *C*, *D*, in welcher Ordnung man will, z. B. *A*, *B*, *D*, *C*, und verbindet *A* mit *B*, *B* mit *D*, *D* mit

mit C, C mit A; ſo wird $ABDC$ eine einfache vierſeitige Figur ſeyn, und die Vereinigung der vier einfachen vierſeitigen Figuren $ABDC$, $AFDG$, $BFCG$, welche durch die Verbindung der vier geraden Linien $\overline{AB}$, $\overline{BD}$, $\overline{DC}$, $\overline{DA}$ bis zu ihrem jedesmaligen Durchſchnitt verlängert, entſtanden, wird die vollſtändige vierſeitige Figur ſeyn. Jede von den einfachen vierſeitigen Figuren hat zwey Diagonalen. Verbindet man den erſten Punkt mit dem dritten und den zweyten mit dem vierten, ſo ſind ſie $\overline{AD}$, $\overline{BC}$ für die erſte $ABDC$; $\overline{AD}$, $\overline{FG}$ für die zweyte $AFDG$; und $\overline{BC}$, $\overline{FG}$ für die dritte $BFCG$. Da aber jede dieſer Diagonalen zwey Vierecken gemein iſt, ſo entſpringen im Ganzen drey verſchiedene Diagonalen für das vollſtändige Viereck daraus.

Man kann dieſelben Begriffe auf Vielecke von einer gröſsern Anzahl Seiten anwenden, z. B. wenn man fünf Punkte hat, und ſie in willkührlicher Ordnung nimmt, ſo erhält man ein Pentagon, wenn man den 1ſten mit dem 2ten, den 2ten mit dem 3ten, den 3ten mit dem 4ten, den 4ten mit dem 5ten, und den 5ten mit dem 1ſten verbindet; und da die Veränderung der Ordnung, welche unter dieſen 5 Punkten ſtatt haben kann, $4 \cdot 3 = 12$ iſt, ſo folgt, daſs 5 gerade Linien, willkührlich in einer Ebene gezogen, 12 verſchiedene Pentagone bilden, deren Vereinigung man vollſtändiges Pentagon nennen kann. Ueberhaupt nennt man n die Anzahl der gezogenen Linien, ſo entſtehen aus ihrer Verbindung $\frac{(n-1) \cdot (n-2) \ldots 1}{2}$ Vielecke, wovon jedes n Sei-

ten hat, und deren Vereinigung das vollſtändige Vieleck von der *n*ten Ordnung, oder deren Seitenzahl *n* iſt.

104. Man ſieht an dem vorher gegebenen Beyſpiele, wie man die Correlation zweyer Figuren *a priori* aufſtellen kann, d. h. ehe man die Formeln des Urſyſtems kennt. Denn wir kennen die Eigenſchaften der Figuren nicht, deren Correlation wir aufgeſtellt haben, oder haben doch wenigſtens dieſe Eigenſchaften nicht dazu benutzt, und doch zeigt uns dieſe Correlation die Veränderung der Zeichen an, die man in den Formeln des Urſyſtems vornehmen muſs, um ſie auf das umgeformte anwendbar zu machen.

Aber die Schwierigkeit, die Correlation der Stellung *a priori* aufzuſtellen, nimmt immer zu, je verwickelter die Figuren werden; und die einfachſte Art, Formeln für jede beſondere Umformung zu erhalten, iſt oft, die Reihe der Schlüſſe von vorn wieder anzufangen, die für das Urſyſtem gemacht wurden, indem man ſie nach den charakteriſtiſchen Verſchiedenheiten der beyden Syſteme modificirt. Um dieſe Verſchiedenheiten aufzufaſſen, iſt es ſehr vortheilhaft, gleich anfangs die Correlation der Conſtruktion darzuſtellen, was gewöhnlich leicht iſt; denn man hat in den vorigen Beyſpielen geſehen, daſs die gröſste Schwierigkeit in Unterſuchung der Zeichenveränderungen, oder der Correlation der Stellung, beſteht. Die Correlation der Conſtruktion, welche die abſoluten Werthe beſtimmt, hilft ſehr bey der Anwendung der gleich anfangs für das Urſyſtem ge-

führten Betrachtungen, wenn man zu den verſchiedenen correlativen Syſtemen übergehen will; vorzüglich wenn man Sorge trägt, wie wir vorhin thaten, dieſelben Buchſtaben, verſchieden accentuirt, an die ſich durch dieſe Correlation der Conſtruktion entſprechenden Punkte zu ſetzen. Dieſs iſt kein gleichgültiger Mechanismus, die Analyſis ſelbſt im Allgemeinen, um beſtimmt zu reden, iſt nur ein feiner Mechanismus auf den Theil der Dialektik angewandt, deſſen Gegenſtand Vergleichung der Gröſsen iſt.

Ueberhaupt, wenn die Correlation eingebildet oder complex wird, iſt es beynahe immer ſehr ſchwer, *a priori* die Correlation der Stellung oder der Zeichen darzuſtellen, und man iſt genöthigt, ſich auf die Correlation der Conſtruktion zu beſchränken; indem man nachher aus der durch dieſe Conſtruktion angezeigten Analogie die Mittel zieht, die Modifikationen, welche die verglichenen Syſteme unterſcheiden, zu entdecken.

Wir wollen zum Beyſpiel den Kreis und die gleichſeitige Hyperbel nehmen, zwiſchen denen, wie man weiſs, ein ſehr genaues Verhältniſs beſteht, und die in der That zwey Syſteme in complexer Correlation ſind.

105. *BDCFM* ſey ein Kreis und *BM'N'Cmn* (*Fig.* 39.) eine gleichſeitige Hyperbel, die auf denſelben Axen oder Diametern conſtruirt ſind. Weil die Gleichung des Kreiſes $yy = aa - xx$ iſt, wenn man die Abſciſſen vom Mittelpunkt nimmt, und den Radius a, die Abſciſſe x, die Ordinate y nennt, und die Gleichung für die Hyperbel $y'y' = x'x' - aa$

ist, so sieht man leicht, dass die Correlation nur zwischen den Funktionen aa, xx, yy von einer Seite, und aa, $x'x'$, $y'y'$ von der andern einfach ist, aber dass sie zwischen den einfachen Quantitäten a, x, y und a, x', y' bloss eingebildet oder complex ist. Man kann sie so ausdrücken:

1stes System , a, x, y

2tes System $a' \; x' \; y' \sqrt{-1}$.

A sey der gemeinschaftliche Mittelpunkt der Curven, $\overline{BC}$ der Diameter oder erste Axe, M irgend ein Punkt des Umkreises, $\overline{MP}$ die Ordinate dieses Punktes, $\overline{AP}$ die entsprechende Abscisse.

Von den Punkten B, C wollen wir nach dem Punkte M Linien ziehen, und $\overline{CM}$ verlängern, bis sie die Hyperbel in M' trifft. Von diesem Punkte M' wollen wir die Ordinate $\overline{M'P'}$, und von den Punkten B, C die Linien $\overline{BM'}$, $\overline{CM'}$ ziehen. Endlich aus dem Mittelpunkte des Kreises A die Linien $\overline{AM}$, $\overline{AM'}$.

Nimmt man nun M, M' für entsprechende Punkte in den beyden Systemen, so haben wir folgende Correlation der Construktion:

1stes System $ABCMP$;

2tes System $ABCM'P'$;

daraus zieht man die Correlation der Construktion:

$$\begin{cases} \text{1stes System} & \overline{AB},\ \overline{AM},\ \overline{BM},\ \overline{CM},\ \overline{AP},\ \overline{BP},\ \overline{CP}, \\ \text{2tes System} & \overline{AB},\ \overline{AM'},\ \overline{BM'},\ \overline{CM'},\ \overline{AP'},\ \overline{BP'},\ \overline{CP'}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} C\hat{B}M,\ B\hat{C}M \text{ u. s. w.} \\ C\hat{B}M',\ B\hat{C}M' \text{ u. s. w.} \end{cases}$$

Da die Gleichung des Kreises $\overline{MP}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AP}^2$, und die der Hyperbel $\overline{M'P'}^2 = \overline{AP'}^2 - \overline{AB}^2$ ist, so

wollen wir nach der Correlation der Conſtruktion beyder Figuren unterſuchen, in wiefern die Eigenſchaften der einen auf die andere anwendbar ſind. Ich löſe das zweyte Glied von jeder dieſer Gleichungen in ſeine zwey Faktoren auf, was für die erſte

$\overline{MP}^2 = (\overline{AB} + \overline{AP}) \cdot (\overline{AB} - \overline{AP})$ giebt, und für die zweyte

$\overline{M'P'}^2 = (\overline{AB} + \overline{AP'}) \cdot (\overline{AP'} - \overline{AB})$, wo ich ſehe, daſs die Quantität $\overline{AP'} - \overline{AB}$ oder $\overline{BP'}$ invers, in Hinſicht auf die ihr entſprechenden $\overline{AB} - \overline{AP}$ geworden iſt, während daſs $\overline{AB} + \overline{AP'}$ oder $\overline{CP'}$, die $\overline{AB} + \overline{AP}$ oder $\overline{CP}$ entſpricht, direkt bleibt.

Weil $\overline{AB} + \overline{AP} = \overline{CP}$, und $AB + \overline{AP'} = \overline{CP'}$, $\overline{AB} - \overline{AP} = \overline{BP}$, $\overline{AP'} - \overline{AB} = \overline{BP'}$, ſo erhält man

$\overline{MP}^2 = \overline{BP} \cdot \overline{CP}$, und

$\overline{MP'}^2 = \overline{BP'} \cdot \overline{CP'}$, woraus man folgende zwey ſich entſprechende Proportionen zieht:

$\overline{CP} : \overline{MP} = \overline{MP} : \overline{BP}$ und

$\overline{CP'} : \overline{MP'} = \overline{MP'} : \overline{BP'}$,

und folglich die gemeinſchaftliche Eigenſchaft, daſs in jeder von den verglichenen Curven die Ordinate die mittlere Proportionallinie zwiſchen den Entfernungen ihres Durchſchnitts mit der Axe von den zwey Endpunkten derſelben Axe iſt.

Die ähnlichen Dreyecke CMP, $CM'P'$ geben

$\overline{CP} : \overline{MP} = \overline{CP'} : \overline{M'P'}$.

Vergleicht man dieſe Proportion mit einer der vorigen, ſo hat man

$\overline{MP} : \overline{BP} = \overline{CP'} : \overline{MP'}$.

Alſo haben die beyden entſprechenden Dreyecke BMP, $BM'P'$ die Seiten, welche an dem rechten Winkel liegen, proportional, alſo ſind dieſe beyden Dreyecke ähnlich, welches eine neue Analogie der beyden Curven iſt.

Aus dieſer Aehnlichkeit folgt, daſs $M'\hat{B}P' = MBP$, d. h. daſs die ſich entſprechenden Linien $\overline{MB}$, $\overline{M'B}$ denſelben Winkel mit der Axe $\overline{BC}$ machen, aber in entgegengeſetzten Richtungen.

Im Kreiſe iſt der Winkel $B\hat{M}C$, der durch die geraden Linien gebildet wird, welche man vom Punkte M nach den beyden Scheiteln der Curve zieht, gleich der Summe der beyden andern $M\hat{B}C$, $M\hat{C}B$. Wir wollen unterſuchen, was für den entſprechenden Winkel $B\hat{M'}C$ der andern Curve ſtatt hat. Nun iſt $M'\hat{B}P'$, der äuſsere Winkel des Dreyecks $M'BC$, gleich der Summe der beyden andern Winkel deſſelben Dreyecks; alſo $B\hat{M'}C = M'\hat{B}P' - M'\hat{C}P'$, d. h. in der gleichſeitigen Hyperbel iſt der Winkel, welchen zwey gerade Linien machen, die aus einem beliebigen Punkte nach den Scheitelpunkten gezogen ſind, immer der Unterſchied der Winkel, welchen jede dieſer beyden Linien mit der Axe bildet, während beym Kreiſe es die Summe iſt. Dieſe Eigenſchaft der Hyperbel giebt uns

$$M'\hat{B}C - M'\hat{C}B = \pi;$$

und aus demſelben Grunde, wenn wir auf dieſer Curve einen andern Punkt N' annehmen, haben wir auch

$$N'\hat{B}C - N'\hat{C}B = \pi.$$

Zieht man von dieſer letzten Gleichung die erſte ab und verſetzt, ſo erhält man

$$N'\hat{B}C - M'\hat{B}C = N'\hat{C}B - M'\hat{C}B \text{ oder}$$
$$N'\hat{B}M' = N'\hat{C}M';$$

d. h. in der gleichſeitigen Hyperbel, ſo wie im Kreiſe ſind die Winkel, die ihren Scheitel an den Enden der Axe haben und auf demſelben Bogen ſtehen, gleich.

Senkt man aus den entſprechenden Punkten M, M' die Perpendikel $\overline{Mp}$, $\overline{M'p'}$ auf die zweyte Axe $\overline{DF}$, ſo ſind die beyden Trapeze $ABMp$ und $p'M'BA$ ähnlich, und geben

$$\overline{Mp} : \overline{BA} = \overline{BA} : \overline{M'p'} \text{ oder}$$
$$\overline{AP} : \overline{BA} = \overline{BA} : \overline{AP'},$$

d. h. die halbe gemeinſchaftliche Axe $\overline{AB}$ iſt mittlere Proportionallinie zwiſchen den entſprechenden Abſciſſen $\overline{AP}$, $\overline{AP'}$.

Die Eigenſchaft endlich des Kreiſes, alle Halbmeſſer gleich zu haben, findet auch in der Hyperbel eine Eigenſchaft, die, wenn gleich verſchieden, ihr doch offenbar entſpricht. Weil die Trapeze $ABMp$ und $p'M'BA$ ähnlich ſind, ziehe man die Diagonalen $\overline{AM}$, $\overline{Bp'}$, und man wird ſehen, daſs im erſten Trapeze die Diagonale $\overline{AM}$ und die Seite $\overline{AB'}$ gleich ſind, im zweyten auch die Diagonale $\overline{Bp'}$ und die Seite $\overline{M'p'}$ gleich ſeyn müſſen; d. h. daſs in der gleichſeitigen Hyperbel jeder Punkt der zweyten Axe gleich weit vom Schenkel und von dem Punkte der Hyperbel entfernt iſt, der ihr in ſenkrechter Richtung entſpricht. Woraus man, wie man ſieht, ſehr leicht die gleichſeitige Hyperbel durch Punkte conſtruiren kann.

Ich habe hier nur eine Annäherung angedeutet, die viel weiter getrieben werden könnte; aber meine Absicht war, nur durch ein Beyspiel zu zeigen, wie die bloſse Correlation der Construktion zwischen zwey Systemen die Untersuchung analoger Eigenschaften der correlativen Systeme erleichtern kann, selbst wenn die Correlation bloſs eingebildet oder complex ist. Ich komme auf die zurück, deren Correlation einfach, direkt oder indirekt ist, um noch auf einige neue Beyspiele die vorhin gegebenen Grundsätze anzuwenden.

106. Eine Anwendung, die am mehresten dazu geeignet ist, den Einfluſs der correlativen Quantitäten auf die Geometrie zu zeigen, findet bey den Lineo-angulair-Quantitäten, d. h. bey den *sinus*, *cos.*, *tang.* u. s. w. statt. Diese Quantitäten sind weder Linien, noch Winkel, sondern abstrakte Zahlen, die als Vermittler dienen, um die Correlation dieser verschiedenartigen Quantitäten darzustellen. Denn der Sinus eines Bogens ist nicht eigentlich der Perpendikel von einem Endpunkte dieses Winkels auf den Halbmesser herabgelassen, der durch den andern Endpunkt geht, sondern das Verhältniſs dieses Perpendikels zum Halbmesser. Sonst könnte am Bogen eine unendliche Menge von Sinus statt haben, nach der Gröſse des Cirkels, statt daſs der Sinus bloſs von der Gröſse des Winkels und gar nicht vom Halbmesser abhängt. Er bezeichnet nichts anders, als die Zahl der Theile des Halbmessers, welche dieser Perpendikel enthält, nachdem der Bogen selbst so oder so viel Theile des ganzen Umkreises enthält.

Sechſte Aufgabe.

107. **Die Correlation der Conſtruktion und der Stellung darzuſtellen, welche zwiſchen den Lineo-angulär-Quantitäten ſtatt finden, die den verſchiedenen Gegenden des Umkreiſes entſprechen.**

Aus irgend einem Punkte C, den man als Centrum annimmt, beſchreibe man einen Umkreis $AFA'F'$ (*Fig.* 40.), und ziehe darin zwey Durchmeſſer $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$ einen auf den andern ſenkrecht.

Auf dem erſten Viertel $\overset{\frown}{AF}$ des Umkreiſes nehme man willkührlich einen Punkt B, und ziehe von dieſem Punkte die Perpendikel $\overline{BD}$, $\overline{BE}$ auf $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$. Auch führe man durch den Punkt A eine unbeſtimmte Tangente $\overline{HAH'}$, aus dem Mittelpunkt C, durch B, die unbeſtimmte Secante $\overline{CH}$, und durch den Punkt F die unbeſtimmte Tangente $\overline{FG}$.

Dieſs feſtgeſetzt, nehme man als Maaſsſtab zur Vergleichung oder erſtes Syſtem die Figur $ABCDEFGH$, ſo kann man die Correlation darſtellen, die zwiſchen dieſem Urſyſtem und den verſchiedenen correlativen Syſtemen beſteht, welche ſtatt haben können, wenn man annimmt, daſs der Punkt B nach und nach beliebige andere Stellungen auf dem gezogenen Umkreiſe annehme.

Wir wollen uns anfangs vorſtellen, daſs der Punkt B ſich auf dem erſten Viertel des Umkreiſes fortbewege, er mag ſich nun dem Punkte A oder dem Punkte F nähern, und daſs man für jede ſeiner Stellungen das Syſtem aufſtelle, was mit dem, das

man als Maaſsſtab zur Vergleichung annahm, correlativ iſt; d. h. daſs man Linien ziehe, die den zur Zuſammenſetzung des vorigen Syſtems gehörenden entſprechen. Alle dieſe beſondere Syſteme werden nur das auf verſchiedene Arten, durch unmerkliche Stufen, umgeformte Urſyſtem ſeyn.

Aber es iſt augenſcheinlich, daſs, da der Punkt nicht aus dem erſten Viertel des Umkreiſes, und folglich weder durch A, noch durch F gegangen iſt, keine von den Quantitäten des Syſtems weder durch o, noch durch ∞ gegangen ſeyn wird. Alſo wird das umgeformte Syſtem immer mit dem Urſyſtem in direkter Correlation geblieben ſeyn; alſo ſo lange der Punkt B nicht aus dieſem erſten Viertel des Umkreiſes hinausgeht, wird keiner von den Werthen des umgeformten Syſtems invers; alſo werden die Formeln des Urſyſtems unmittelbar darauf anwendbar ſeyn.

Wir wollen jetzt ſehen, was geſchieht, wenn der Punkt B über F gegangen iſt, und ſich auf dem zweyten Viertel des Umkreiſes befindet.

Ich will annehmen, er ſey in B' angekommen, und ich ſtelle jetzt das correlative Syſtem auf, indem ich Schritt vor Schritt der Conſtruktion des Urſyſtems folge; d. h. ich ziehe vom neuen Punkte B' zwey Perpendikel $\overline{B'D'}$, $\overline{B'E'}$ auf die Diameter $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$, hernach vom Punkte A, der der Urſprung oder der erſte Punkt des Bogens iſt, die unbeſtimmte Tangente $\overline{HAH'}$, die ſich hier mit der des erſten Syſtems vermiſcht; vom Mittelpunkte C durch den Punkt B', welcher dem Punkte B des erſten Syſtems entſpricht, die unbeſtimmte Secante $\overline{H'CG'}$; endlich durch den

Punkt F, der das erste Viertel des Umkreises begränzt, die unbestimmte Tangente $\overline{GFG'}$, die sich hier mit der des ersten Systems vermischt.

Diess festgesetzt, wenn man sich vorstellt, dass der Punkt B durch F geht, um nach B' zu gelangen, so ist deutlich, dass im Augenblick, da er in F fällt, verschiedene Linien des Systems wie $\overline{BE} = 0$ und andere wie $\overline{AH} = \infty$ geworden sind. Also können einige unter ihnen invers geworden seyn, und um die gesuchte Correlation darzustellen, muss man sie von denen unterscheiden, die direkt geblieben sind.

Hierzu wollen wir gleich anfangs die Correlation der Construktion darstellen, d. h. das Entsprechen der Punkte, die die in beyden Systemen gezogenen Bogen und Linien begränzen.

Die Reihe der Punkte des ersten Systems, denen man übrigens eine beliebige Ordnung geben kann, ist, wie man sieht, $ABCDEFGH$, und die des zweyten, nach derselben Ordnung genommen, indem man der Construktion folgt, $AB'CD'E'FG'H'$. Also stellt man die Correlation der Construktion so dar:

1stes System . . . $ABCDEFGH$

2tes System . . . $AB'CD'E'FG'H'$.

Jetzt wollen wir die Correlation der Quantitäten, d. h. der absoluten Werthe suchen; nachher kommen wir zu der der Zeichen.

Diese Correlation wird leicht nach der eben gegebenen Correlation der Construktion darzustellen seyn. Man fängt mit Aufzählung der Quantitäten des ersten Systems an, die man bey der Vergleichung

beyder Syſteme gebrauchen will. Um in dem zweyten Syſteme jeden entſprechenden Werth zu finden, ſo braucht man nur auf die Punkte, die ſie begränzen, zu ſehen; denn dieſe Quantität wird augenſcheinlich der entſprechen, die im Urſyſtem durch die entſprechenden Punkte beſtimmt iſt.

Z. B. da der Punkt A derſelbe für beyde Syſteme iſt, und der Punkt B' des zweyten dem Punkte A des erſten entſpricht, ſo iſt es augenſcheinlich, daſs der Bogen $\overset{\frown}{AB'}$ oder $\overset{\frown}{ABB'}$ dem Bogen $\overset{\frown}{AB}$ des erſten entſpricht. Eben ſo, da B' B und E' E entſpricht, ſo wird offenbar $\overline{B'E'}$, $\overline{BE}$ entſprechen u. ſ. w. Die Correlation der abſoluten Werthe, indem man ſie auf die vorher dargeſtellte Correlation der Conſtruktion gründet, wird alſo folgende ſeyn:

$$\begin{matrix} \text{1stes System} \\ \text{2tes System} \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} \overset{\frown}{AB}, & \overset{\frown}{AF}, & \overset{\frown}{BF}, & \overline{AC}, & \overline{FC}, & \overline{BC}, & \overline{BD}, \\ \overset{\frown}{ABB'}, & \overset{\frown}{AF}, & \overset{\frown}{B'F}, & \overline{AC}, & \overline{FC}, & \overline{B'C}, & \overline{B'D}, \end{matrix} \right.$$

$$\left\{ \begin{matrix} \overline{CE}, & \overline{AD}, & \overline{BE}, & \overline{CD}, & \overline{FE}, & \overline{AH}, & \overline{FG}, & \overline{CH}, & \overline{CG}. \\ \overline{CE'}, & \overline{AD'}, & \overline{BE'}, & \overline{CD'}, & \overline{FE'}, & \overline{AH'}, & \overline{FG'}, & \overline{CH'}, & \overline{CG'}. \end{matrix} \right.$$

Jetzt wollen wir auch die Correlation der Zeichen darſtellen. Hierzu unterſuche ich zuerſt, welche von den vorher aufgezählten Quantitäten in dem Augenblicke, wo das Urſyſtem zum Zuſtande des zweyten übertritt, d. h. in dem Augenblicke, wo B durch F geht, weder durch o, noch durch ∞ gehen; denn die ſind direkt geblieben, und man weiſs ſchon, daſs ihr Zeichen der Correlation $+$ iſt.

Folgt man nun dem in den vorigen Beyſpielen angezeigten Gange, d. h. betrachtet man das Syſtem in dem Augenblicke, wo B durch F gehen will oder

ging, und wo man B noch unendlich nahe annehmen kann, ſo ſieht man leicht, daſs die Quantitäten, die nicht durch o, oder durch ∞ gegangen ſind, $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AF}$, $\overline{AC}$, $\overline{FC}$, $\overline{BC}$, $\overline{BD}$, $\overline{CE}$, $\overline{AD}$, $\overline{CG}$ ſind. Es bleiben alſo nur die Quantitäten $\overset{\frown}{BF}$, $\overline{BE}$, $\overline{CD}$, $\overline{FE}$, $\overline{AH}$, $\overline{FG}$, $\overline{CH}$ nach, die, da ſie theils durch o, theils durch ∞ gegangen ſind, wohl im neuen Syſtem invers ſeyn könnten. Ich unterſuche alſo, was jede von ihnen insbeſondere wird.

1) Im Urſyſtem hat man $\overset{\frown}{BF} = \overset{\frown}{AF} - \overset{\frown}{AB}$, im umgeformten $\overset{\frown}{B'F} = \overset{\frown}{AB'} - \overset{\frown}{AF}$; alſo iſt $\overset{\frown}{B'F}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

2) Im Urſyſtem hat man $\overline{BE} = \overline{AC} - \overline{AD}$, im umgeformten $\overline{B'E'} = \overline{A'D'} - \overline{AC}$; alſo iſt $\overline{B'E'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

3) Aus demſelben Grunde iſt $\overline{CD'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

4) Im Urſyſtem hat man $\overline{FE} = \overline{FF'} - \overline{EF'}$, im umgeformten Syſtem $\overline{FE'} = \overline{FF'} - \overline{E'F'}$; alſo iſt $\overline{FE'}$ direkt, und ihr Zeichen der Correlation +.

5) $\overline{AH'}$ iſt, wie B in F fiel, durch ∞ gegangen; um zu wiſſen, was ſie wird, nehme ich willkührlich einen feſten Punkt K auf der Richtung dieſer Tangente und jenſeits des Punktes H. Dieſs angenommen, ſo hat man

im Urſyſtem $\overline{AH} = \overline{AK} - \overline{HK}$,

im umgeformten $\overline{AH'} = \overline{H'K} - \overline{AK}$;

alſo iſt $\overline{AH'}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —.

Man kann daſſelbe beweiſen, ohne zu dem Hülfspunkt K ſeine Zuflucht zu nehmen; denn die beyden ähnlichen Dreyecke ACH', $E'B'C$ geben

$$\overline{AH'} : \overline{AC} = \overline{E'C} : \overline{E'B'}, \text{ oder}$$

$$\overline{AH'} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{E'C}}{\overline{E'B'}}.$$

Dieſs letzte Glied iſt nun invers (27), weil nach den vorher gefundenen Zeichen der Correlation für $\overline{AC}$, $\overline{E'C}$, $\overline{E'B'}$ bloſs die letzte Quantität invers iſt.

6) Eben ſo beweiſt man, daſs die Quantität $\overline{FG'}$ invers und ihr Zeichen der Correlation — ſeyn muſs, wenn man auf $\overline{FG}$ einen Hülfspunkt jenſeits des Punktes G annimmt, oder auch durch die ähnlichen Dreyecke $FG'C$, $E'B'C$.

7) Die ſchon vorher betrachteten ähnlichen Dreyecke ACH', $E'B'C$ geben $\overline{CH'} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB'}}{\overline{E'B'}}$; in dieſem letzten Gliede nun iſt $\overline{E'B'}$ allein invers, alſo iſt $\overline{CH'}$ auch invers und ihr Zeichen der Correlation —.

So iſt alſo die Correlation der Zeichen ganz zwiſchen den beyden Syſtemen $ABCDEFGH$ und $AB'CD'E'FG'H'$ dargeſtellt, und wir erhalten folgende

Allgemeine Tafel der Correlation zwiſchen den beyden Syſtemen:

1ſtes Syſtem	$+\ \widehat{AB}$	$+\ \widehat{AF}$	$+\ \widehat{BF}$	$+\ \overline{AC}$	$+\ \overline{FC}$
2tes Syſtem	$+\ \widehat{ABB'}$	$+\ \widehat{AF}$	$-\ \widehat{B'F}$	$+\ \overline{AC}$	$+\ \overline{FC}$

$$\begin{cases} + \overline{BC} + \overline{BD} + \overline{CE} + \overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CD} + \overline{FE} \\ + \overline{B'C} + \overline{B'D'} + \overline{CE'} + \overline{AD'} - \overline{B'E'} - \overline{CD'} + \overline{FE'} \end{cases}$$

$$\begin{cases} + \overline{AH} + \overline{FG} + \overline{CH} + \overline{CG}. \\ - \overline{AH'} - \overline{FG'} - \overline{CH'} + \overline{CG'}. \end{cases}$$

Alles, was wir vom Punkte B geſagt haben, iſt ſichtbar auf ihn anwendbar, ſo lange er nicht aus dem zweyten Viertel des Umkreiſes geht, weil dann keine von den aufgezählten Quantitäten weder durch o, noch durch ∞ gehen und ſo ihr Zeichen der Correlation verändern wird; alſo hat dieſe Tafel der Correlation ſtatt für das ganze zweyte Viertel des Umkreiſes, und drückt die Subſtitutionen aus, die man in den Formeln des Syſtems $ABCDEFGH$ machen müſste, um dieſe Formeln auf das Syſtem $AB'CD'E'FG'H'$ anwendbar zu machen.

Ich gehe zum dritten Viertel des Umkreiſes über, indem ich jetzt das zweyte, welches wir eben unterſucht haben, ihm zum Maaſsſtab zur Vergleichung dienen laſſe.

108. Ich nehme alſo an, daſs der Punkt B' nach B'' gehe, indem er zuvor durch den Punkt A' gegangen iſt, und ſtelle das neue Syſtem dar, indem ich, Schritt vor Schritt, der Conſtruktion des erſten folge; d. h. vom neuen Punkte B'' ziehe ich die Perpendikel $\overline{B''D''}$, $\overline{B''E''}$ auf den Durchmeſſer $\overline{AA'}$, $\overline{FF'}$; durch den Punkt A, der immer Urſprung des Bogens iſt, führe ich die unbeſtimmte Tangente $\overline{H'AH''}$, die beym Ziehen ſich mit der in den vorigen Syſtemen vermiſcht; durch den Mittelpunkt C und den Punkt B'' führe ich die unbeſtimmte Se-

cante $\overline{B''CG''}$, und endlich durch F, den Endpunkt des erſten Viertels des Umkreiſes, ziehe ich die unbeſtimmte Tangente $\overline{GFG}$, die beym Ziehen ſich mit der der vorigen Syſteme vermiſcht.

Dieſs feſtgeſetzt, ſo iſt es augenſcheinlich, daſs man die Correlation der Conſtruktion ſo darſtellen wird:

2tes Syſtem $A\,B'\,C\,D'\,E'\,F\,G'\,H'$

3tes Syſtem $AB''CD''E''FG''H''$.

Und indem wir hiervon ausgehen, errichten wir leicht folgende Correlation der Conſtruktion:

$$\begin{array}{l} \text{2tes Syſtem} \\ \text{3tes Syſtem} \end{array} \left\{ \begin{array}{llllll} \overparen{ABB'}, & \overparen{AF}, & \overparen{FB'}, & \overline{AC}, & \overline{FC}, & \overline{B'C}, \\ \overparen{ABB'B''}, & \overparen{AF}, & \overparen{FB'B''}, & \overline{AC}, & \overline{FC}, & \overline{B''C}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{llllllll} \overline{B'D'}, & \overline{CE'}, & \overline{AD'}, & \overline{B'E'}, & \overline{CD}, & \overline{FE'}, & \overline{AH'}, & \overline{FG'}, \\ \overline{B''D''}, & \overline{CE''}, & \overline{AD''}, & \overline{B''E''}, & \overline{CD}, & \overline{FE''}, & \overline{AH''}, & \overline{FG''}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \overline{CH'}, & \overline{CG'}. \\ \overline{CH''}, & \overline{CG''}. \end{array} \right.$$

Es bleibt uns übrig die Correlation der Zeichen aufzuſtellen. Hierzu muſs man jede der Quantitäten des neuen Syſtems insbeſondere betrachten und ſie mit der ihr im vorigen Syſtem entſprechenden vergleichen, welches jetzt als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen wird. Wenn die ſo zwey und zwey verglichenen Quantitäten unter ſich direkt geblieben ſind, behalten ihre Werthe dieſelben Zeichen der Correlation; d. h. man muſs jedem im dritten Syſteme daſſelbe Zeichen der Correlation geben, was der ihm entſprechende im zweyten hat, und ſind dieſe Quantitäten in Hinſicht auf einander invers geworden, ſo muſs man jedem der Werthe, die ſich

im

im dritten Syſteme finden, ein Zeichen der Correlation geben, welches dem des ihm im zweyten Syſteme entſprechenden Werths entgegengeſetzt iſt. Da $\widehat{ABB'}$ weder durch o, noch durch ∞ gegangen iſt, um $\widehat{ABB'B''}$ zu werden, ſo bleibt er, wie er im vorigen Syſteme war, d. h. ſein Zeichen der Correlation im dritten Syſteme iſt auch $+$.

$\widehat{FB'}$ iſt eben ſo wenig durch o als durch ∞ gegangen, um $\widehat{FB'B''}$ zu werden, und muſs alſo daſſelbe Zeichen der Correlation behalten, was er im zweyten Syſteme hatte, d. h. —.

Verfährt man ſo bey jeder andern Quantität, ſo wird man folgende Correlation der Zeichen für das dritte Syſtem darſtellen:

$$+ \widehat{ABB'B''} + \widehat{AF} - \widehat{FB'B''} + \overline{AC} + \overline{FC} + \overline{B''C}$$
$$+ \overline{B''D''} - \overline{CE''} + \overline{AD''} - \overline{B''E''} - \overline{CD''}$$
$$+ \overline{FE''} + \overline{AH''} + \overline{FG''} - \overline{CH''} - \overline{CG''}.$$

Was wir hier vom Punkte B'' geſagt haben, iſt offenbar auf ihn anwendbar, ſo lange er nicht aus dem dritten Viertel des Umkreiſes geht, weil dann keine der aufgezählten Quantitäten weder durch o, noch durch ∞ gegangen ſeyn wird. Alſo haben die vorher gefundenen Zeichen der Correlation für das ganze dritte Viertel des Umkreiſes ſtatt, und zeigen die Veränderungen an, die man in den Formeln des Urſyſtems machen muſs, um ſie auf dieſes dritte Viertel des Umkreiſes anwendbar zu machen. Jetzt müſſen wir noch unterſuchen, was für das vierte Viertel ſtatt hat.

109. Ich nehme dabey das eben unterſuchte dritte Viertel als Maaſsſtab zur Vergleichung an.

Wir wollen alſo uns vorſtellen, daſs B'' die Stellung in B''' annehme, nachdem er zuvor durch F^{v} gegangen iſt. Um das neue Syſtem zu gründen, wollen wir auch die Perpendikel $\overline{B'''D'''}$, $\overline{B'''E'''}$ auf die Durchmeſſer $\overline{AH'}$, $\overline{FF'}$ ziehen; ferner die unbeſtimmte Tangente $\overline{HAH'}$ durch den erſten Punkt des Bogens A; ſodann die Secante $\overline{CB'''H'''}$ und endlich die Tangente $\overline{GFG'''}$, durch F das Ende des erſten Viertels des Umkreiſes, wie in den vorigen Syſtemen.

Das neue Syſtem wird alſo, wenn wir, wie vorher, der Ordnung der Conſtruktion folgen, $AB'''CD'''E'''FG'''H'''$ ſeyn; und verfährt man ferner wie vorher, ſo ſtellt man folgende Correlation der abſoluten Werthe und der Zeichen für das vierte Syſtem dar:

$$\mp \widehat{ABB'B''B'''},\ +\widehat{AF},\ -\widehat{FB'B''B'''},\ +\overline{AC},\ +\overline{FC},$$
$$+\overline{B'''C},\ -\overline{B'''D'''},\ -\overline{CE'''},\ +\overline{AD'''},\ +\overline{B'''E'''},$$
$$+\overline{CD'''},\ +\overline{FE'''},\ -\overline{AH'''},\ -\overline{FG'''},\ +\overline{CH'''},$$
$$-\overline{CG'''}.$$

Noch mehr, was ich vom Punkte B''' geſagt habe, iſt ſichtbar auf ihn anwendbar, ſo lange er nicht aus dem vierten Viertel des Umkreiſes geht. Alſo haben die vorher gefundenen Zeichen der Correlation ſtatt für das ganze vierte Viertel, und zeigen die Veränderungen an, die man in den Formeln des Urſyſtems machen muſs, um ſie auf dieſs vierte Viertel anwendbar zu machen.

110. Man könnte noch ein fünftes Syſtem bilden, wenn man annimmt, daſs der Punkt B''' auf ſeine erſte Stellung B zurückkommt, nachdem er durch A gegangen iſt; ferner ein ſechſtes, wenn man

ſich vorſtellt, er ſtelle ſich von neuem in B', nachdem er nochmals durch F gegangen iſt u. ſ. w. Aber die Quantitäten dieſer neuen Syſteme werden nur durch den Werth der Bogen von den erſten unterſchieden ſeyn, die gröſser als der Umfang werden würden; d. h. für das fünfte Syſtem z. B. würde der Bogen nicht $\overset{\frown}{AB}$ ſeyn, wie der vorige, ſondern der ganze Umkreis *plus* $\overset{\frown}{AB}$, indeſs alle in dieſem fünften Syſteme gezogenen geraden Linien dieſelben wie im erſten Syſteme blieben. Derſelbe Fall würde auch beym ſechſten Syſteme eintreten, wenn es mit dem zweyten, beym ſiebenten, wenn es mit dem dritten verglichen wird u. ſ. w. Man kann alſo alle möglichen Syſteme auf die vier ſchon unterſuchten zurückführen.

Jetzt wollen wir die vier Syſteme in einer Tafel vereinigen, und weil die Correlation ſich nicht verändert, ſo lange die Punkte B, B', B'', B''' jeder in dem ihm angewieſenen Viertel des Umkreiſes bleiben, ſo können wir wegen mehrerer Einfachheit annehmen, daſs E und E' in einander fallen (*Fig.* 41.), ſo wie E'' und E''', D und D''', D' und D'', woraus wir erhalten

$$\overline{BD} = \overline{B'D'} = \overline{B''D''} = \overline{B'''D'''}, \text{ und}$$
$$\overline{BE} = \overline{B'E'} = \overline{B''E''} = \overline{B'''E'''}.$$

Die allgemeine Tafel der Correlation der vier Syſteme ſtellt man alſo auf folgende Art dar. Man hat der Kürze wegen die beſtändigen Quantitäten $\overset{\frown}{AF}$, $\overline{AC}$ und eine von denen, die doppelt da ſind, wie BD, CE, unterdrückt.

Allgemeine Tafel der Correlation der vier Systeme:

System des ersten Viertels des Umkreises	$+\widehat{AB}$	$+\widehat{FB}$	$+\overline{BD}+\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{FE}+\overline{AH}+\overline{FG}+\overline{CH}+\overline{CG}.$
System des zweyten Viertels des Umkreises	$+\widehat{ABB'}$	$-\widehat{FB'}$	$+\overline{BD}+\overline{AD'}-\overline{BE}+\overline{FE}-\overline{AH}-\overline{FG}-\overline{CH}+\overline{CG}.$
System des dritten Viertels des Umkreises	$+\widehat{ABB'B''}$	$-\widehat{FB'B''}$	$+\overline{BD}+\overline{AD'}-\overline{BE}+\overline{FE''}+\overline{AH}-\overline{FG}-\overline{CH}-\overline{CG}.$
System des vierten Viertels des Umkreises	$+\widehat{ABB'B''B'''}$	$-\widehat{FB'B''B'''}$	$-\overline{BD}+\overline{AD}+\overline{BE}+\overline{FE''}-\overline{AH}-\overline{FH}+\overline{CH}-\overline{CG}.$

Vermittelst dieser vergleichenden Tafel braucht man nur, wenn die Eigenschaften des Ursystems, d. h. des ersten Viertels des Umkreises, durch Formeln unter den vorher aufgerechneten Quantitäten ausgedrückt sind, um diese Formeln auf irgend einen andern Punkt des Umkreises anwendbar zu machen, die darin angezeigten Veränderungen der Zeichen vorzunehmen, nachdem sich das zweyte Ende des Bogens, dessen Ursprung in A ist, auf dem zweyten, dritten oder vierten Viertel des Umkreises befindet.

Es ist angenscheinlich, dass man eben so auf irgend eines der vier Systeme die Formeln für irgend eines der andern anwenden kann, wenn man die Zeichen verändert, die in den zwey Systemen verschieden sind.

111. Die Resultate dieser Tafel können auf eine sehr einfache Regel zurückgebracht werden, die mit dem übereinstimmt, was ich (38) über die Wurzeln der Gleichung gesagt habe, die zwischen den Coordinaten derselben Curve besteht.

1) Das Zeichen der Correlation von $\overline{BD}$ ist +, so lange der Punkt B über dem Durchmesser AA' ist, und —, wenn er darunter ist.

2) Das Zeichen der Correlation von $\overline{BE}$ ist +, so lange der Punkt B links von FF' ist, und —, wenn er rechts geht.

3) In Hinsicht der übrigen Quantitäten des Systems, da sie alle Funktionen von BD, $\overline{BE}$ und beständigen Quantitäten sind, so nimmt man sie direkt oder invers an, nachdem ihre Werthe, so ausgedrückt mit den angezeigten Veränderungen der Zeichen, ein positives oder negatives Resultat geben (27). Z. B. wenn der wandernde Punkt B'' ist und man die Secante $\overline{CH''}$ haben will, so nimmt man diese Proportion, welche die ähnlichen Dreyecke $CH''A$ und $CB''D''$ geben;

$$\overline{CH''} : \overline{AC} = \overline{CB''} : \overline{CD''} \text{ oder } \overline{CH''} = \frac{\overline{AC} \cdot \overline{CB''}}{\overline{CD''}}.$$

Aber nach dem zweyten Theile der eben aufgestellten Regel, hat $\overline{CD''}$ — zum Zeichen der Correlation, während dass $\overline{AC}$, $\overline{CB''}$ beyde + haben: also ist das Zeichen der Correlation von $\overline{CH''}$ —, also ist $\overline{CH''}$ invers; d. h. die Secante jedes Bogens, der grösser ist als der halbe Umkreis, und kleiner als $\frac{3}{4}$

desſelben, iſt invers und ihr Werth der Correlation negativ.

112. Dieſs iſt ein neuer Beweis, daſs die Regel, welche man gewöhnlich giebt, um das Zeichen zu beurtheilen, welches eine Quantität annehmen muſs, wenn das allgemeine Syſtem ſich verändert hat, unbeſtimmt und ſelbſt nicht richtig iſt. Dieſe Regel iſt nämlich, daſs das Zeichen ſich nur ändert, wenn man die Linien nach einer andern Richtung annimmt, als man ihnen anfangs beylegte. Nun fällt die Secante des dritten Viertels des Umkreiſes genau in Hinſicht der Gröſse und der Richtung in die Secante des Urſyſtems, ſie ſollte alſo + zum Zeichen der Correlation haben, und doch iſt es gewiſs, daſs ſie — hat.

Dieſe Regel iſt ſonſt auch augenſcheinlich unzulänglich (wie ich ſchon (42) bemerkt habe) für den Fall, wo die Richtungen der Linien weder in der urſprünglichen, noch in der entgegengeſetzten Richtung ſind. Wie kann man z. B. wiſſen, ob $\overline{CH}$ und $\overline{CH'}$, welche die ſich entſprechenden Secanten im erſten und zweyten Viertel des Umkreiſes ſind, einerley Zeichen haben, oder nicht? Denn da dieſe beyden Linien einen Winkel machen, kann man weder ſagen, daſs ſie in derſelben, noch daſs ſie in entgegengeſetzter Richtung ſind.

113. Es erheben ſich noch andere Schwierigkeiten, denn man kann z. B. fragen, ob der Halbmeſſer $\overline{CA}$ und der Halbmeſſer $\overline{CA'}$, die in entgegengeſetzter Richtung genommen ſind, daſſelbe Zeichen in den Formeln haben müſſen, oder wenn man $+\overline{CA}$ annimmt, ob man $-\overline{CA'}$ ſetzen muſs? Es iſt gewiſs,

dafs, da $\overline{CA}$ eine beftändige Quantität ift, ihr Zeichen der Correlation auch + feyn mufs, und doch fcheint es, als wenn man ihr nach der Regel — geben müfste, wenn fie $\overline{CA'}$ wird, weil fie dann in entgegengefetzter Richtung von $\overline{CA}$ genommen ift. Man wird vielleicht fagen, dafs die Regel nicht auf beftändige Quantitäten anwendbar fey; aber fie führt keine Ausnahmen an, und zugegeben, dafs fie diefe hätte, fo kann man noch immer fragen, welches der Grund diefes Unterfchiedes zwifchen veränderlichen und beftändigen Quantitäten fey? Denn die Regel gründet fich nicht auf abfoluten Werth der verglichenen Linien, fondern auf ihre jedesmaligen Stellungen.

114. Endlich kann man noch folgende Einwendung gegen diefe Regel machen. $\overline{BE}$ ift, fagt man, pofitiv, und $\overline{B'E}$ negativ; weil alfo diefe Linien an fich gleich find, fo hat man $\overline{B'E} = -\overline{BE'}$, alfo wird $\overline{BE'}$, welches $\overline{BE} + \overline{B'E}$ ift, $\overline{BE} - \overline{BE} = 0$, oder $\overline{BB'} = 0$, was ungereimt ift. Eben fo hätte man $\overline{BB'''} = \overline{BD} + \overline{B'''D}$, was, weil $\overline{B'''D}$ negativ ift, auch 0 wird, alfo hat man auch $\overline{BB'''} = 0$; ein anderes Refultat, was mit der gefunden Vernunft ftreitet. Indefs nimmt man diefe beyden Refultate der Regel an, fo hat man $\overline{BB'} . \overline{BB'''} = 0$, woraus z. B. folgt, dafs das in einem Kreife befchriebene Parallelogramm (alfo jedes) $= 0$ fey. Man fühlt gewifs, dafs, wenn man ähnliche Schlüffe in der Mathematik zuliefse, diefe Wiffenfchaft der Evidenz bald fo entartet feyn würde, dafs man fich nicht mehr verftände. Alfo ift diefe Regel in der That nicht

richtig, und beruht nicht einmal auf ſcheinbaren Gründen. Man giebt ſie bloſs als eine Uebereinkunft, die man gemacht hat, um die verſchiedenen Lagen der Linien zu unterſcheiden. Aber das kann man nicht durch eine Uebereinkunft thun, wenn man nicht, indem man die Zeichen + und — braucht, um die Stellungen zu unterſcheiden, dabey zugleich beweiſet, daſs man das Recht hat, ſie eben ſo zu gebrauchen, als wenn man bloſs dadurch Addition und Subtraktion anzeigen will. Warum, da man ferner die Richtungen der poſitiven und negativen Linien willkührlich beſtimmen kann, warum iſt nicht alles auf beyden Seiten gleich? und warum, wenn man eine poſitive Linie mit einer negativen multiplicirt, hat die poſitive das Vorrecht, ihr Zeichen dem Produkte zu geben?

Der Durchmeſſer des Umkreiſes $AFA'F$ ſey durch 1 vorgeſtellt, der vierte Theil des Umkreiſes durch π, $\overline{AB}$ durch a, ſo haben wir

$$\widehat{AB} = a,\quad \widehat{ABB'} = 2\pi - a,\quad \widehat{ABB'B''} = 2\pi + a,$$
$$\widehat{ABB'B''B'''} = 4\pi - a,\quad \widehat{BF} = \pi - a,\quad \widehat{FB'} = \pi - a,$$
$$\widehat{FB'B''} = \pi + a,\quad \widehat{FB'B''B'''} = 3\pi - a,\quad \overline{BD} = \sin a,$$
$$\overline{BE} = \cos a,\quad \overline{AD} = \sin v.\, a,\quad \overline{FE} = \cos v.\, a,$$
$$\overline{AD'} = 2 - \sin v.\, a,\quad \overline{AH} = \mathrm{tang}\, a,\quad \overline{FG} = \cot a,$$
$$\overline{CH} = \sec a,\quad \overline{CG} = \mathrm{cosec}\, a,\quad \overline{FE''} = 2 - \cos v.\, a.$$

Setzt man dieſe Werthe in die vorige allgemeine Tafel der Correlation, ſo erhält ſie folgende Geſtalt:

Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das erſte Viertel des Umkreiſes fällt	$+ a$,	$+ (\pi - a)$,
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreiſes fällt	$+ (2\pi - a)$,	$- (\pi - a)$,
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreiſes fällt	$+ (2\pi + a)$,	$- (\pi + a)$,
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreiſes fällt	$+ (4\pi - a)$,	$- (3\pi - a)$,

+ *ſin a*,	+ *coſ a*,	+ *tang a*,	+ *cot a*,	+ *ſec a*,
+ *ſin a*,	— *coſ a*,	— *tang a*,	— *cot a*,	— *ſec a*,
— *ſin a*,	— *coſ a*,	+ *tang a*,	+ *cot a*,	— *ſec a*,
— *ſin a*,	+ *coſ a*,	— *tang a*,	— *cot a*,	+ *ſec a*,

+ *coſec a*,	+ *ſin v. a*,	+ *coſ v. a.*
+ *coſec a*,	+ 2 — *ſin v. a*,	+ *coſ v. a.*
— *coſec a*,	+ 2 — *ſin v. a*,	+ 2 — *coſ v. a.*
— *coſec a*,	+ *ſin v. a*,	+ 2 — *coſ v. a.*

Dieſe Tafel iſt für jeden Werth von a, der kleiner iſt als π. Wenn wir alſo annehmen, daſs b das Complement von a ſey, ſo hat dieſelbe Tafel ſtatt, wenn man darin b für a ſetzt. Alſo weil nach der Hypotheſe $b = \pi - a$, ſo hat dieſelbe Tafel auch ſtatt, wenn man darin $\pi - a$ ſtatt a ſetzt und folglich

$\cos a$ für $\sin a$, $\sin a$ für $\cos a$, $\cot a$ für $\tang a$ u. ſ. w. Durch dieſe Subſtitution wird die Tafel:

Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das erſte Viertel des Umkreiſes fällt	$+(\pi - a)$,	$+a$,	$+\cos a$,	$+\sin a$,	$+\cot a$,	$+\tang a$,	$+\operatorname{cosec} a$,	$+\sec a$,	$+\cos v.\, a$,	$+\sin v.\, a.$
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreiſes fällt	$+(\pi + a)$,	$-a$,	$+\cos a$,	$-\sin a$,	$-\cot a$,	$-\tang a$,	$-\operatorname{cosec} a$,	$+\sec a$,	$+2 - \cos v.\, a$,	$+\sin v.\, a.$
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreiſes fällt	$+(3\pi - a)$,	$-(2\pi - a)$,	$-\cos a$,	$-\sin a$,	$+\cot a$,	$+\tang a$,	$-\operatorname{cosec} a$,	$-\sec a$,	$+2 - \cos v.\, a$,	$+2 - \sin v.\, a.$
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreiſes fällt	$+(3\pi + a)$,	$+(2\pi + a)$,	$-\cos a$,	$+\sin a$,	$-\cot a$,	$-\tang a$,	$+\operatorname{cosec} a$,	$-\sec a$,	$+\cos v.\, a$,	$+2 - \sin v.\, a.$

115. Nachdem ich unterſucht habe, was ſtatt findet, wenn der Punkt B ſich nach der Richtung $BB'B''B'''$ bewegt, ſo will ich unterſuchen, was ge-

ſchieht, wenn er ſich nach der entgegengeſetzten Richtung $BB'''B''B'$ bewegt.

Hierzu wollen wir das neue Syſtem $AB'''CD'''E'''FG'''H'''$ mit dem des erſten Viertels vergleichen, welches man als aus dem Umlauf des Punktes B in der Richtung $BB'''B''B'$ entſtanden betrachtet, und dann die Correlation der abſoluten Werthe und Zeichen der beyden Syſteme darſtellen, die folgende ſeyn wird:

$$\begin{array}{l} \text{Urſyſtem} \\ \text{umgeformtes Syſtem} \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} +\ \overparen{AB}, & +\ \overparen{FB}, & +\ \overline{BD}, \\ -\ \overparen{AB'''}, & +\ \overparen{FAB'''}, & -\ \overline{B'''D'''}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lllll} +\ \overline{AD}, & +\ \overline{BE}, & +\ \overline{FE}, & +\ \overline{AH}, & +\ \overline{FG}, \\ +\ \overline{AD'''}, & +\ \overline{B'''E'''}, & +\ \overline{F'E'''}, & -\ \overline{AH'''}, & -\ \overline{FG'''}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} +\ \overline{CH}, & +\ \overline{CG}. \\ +\ \overline{CH'''}, & -\ \overline{CG'''}. \end{array} \right.$$

In der That müſste $\overline{AB}$ durch o gehen, um $\overline{AB'''}$ zu werden, in dem Augenblicke, wo der Punkt B, der ſich nach der Hypotheſe in der Richtung $BB'''B''B'$ herum bewegt, in den Punkt A fiel. Alſo konnte $\overline{AB}$ invers werden, um $\overline{AB'''}$ zu werden, und dieſs trifft wirklich ein, denn im Urſyſtem hatte man $\overparen{AB} = \overparen{AF} - \overparen{FB}$, und im umgeformten Syſtem hat man im Gegentheil $\overparen{AB'''} = \overparen{FB'''} - \overparen{AF'''}$; alſo iſt das Zeichen der Correlation von $\overparen{AB'''}$ —, weil weder $\overparen{FB}$, noch $\overparen{AF}$ durch o oder durch ∞ gegangen ſind. Alſo muſs auch $\overparen{FB}$, das weder durch o, noch durch ∞ gegangen iſt, + zum Zeichen der Correlation haben.

Im Urſyſtem hat man $\overline{BD} = \overline{FC} - \overline{FE}$, im umgeformten im Gegentheil $\overline{B'''D'''} = \overline{FE'''} - \overline{FC}$;

alſo iſt $\overline{B'''D'''}$ invers, und ihr Zeichen der Correlation —. Eben ſo bey den andern. Nimmt man jetzt an, daſs B nach B''' gekommen, noch fortfahre ſich in derſelben Richtung herum zu bewegen, bis es nach B'' kommt, und von da nach B', und man immer dieſelben Betrachtungen dabey anſtelle, die wir für den Fall anſtellten, wo er nach der entgegengeſetzten Richtung ſich bewegte, ſo kommt man offenbar auf folgende zwey neue Tafeln, die den vorher gegebenen entſprechen, und woraus man ſieht, daſs überhaupt die Bogen, deren Werth der Correlation mit dem Zeichen — afficirt iſt, inverſe Bogen bezeichnen, nach der Richtung $AB'''B''B'B$ genommen.

Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das erſte Viertel des Umkreiſes fällt	$-(4\pi - a)$,	$+(5\pi - a)$,
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreiſes fällt	$-(2\pi + a)$,	$+(3\pi + a)$,
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreiſes fällt	$-(2\pi - a)$,	$+(3\pi - a)$,
Syſtem der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreiſes fällt	$-a$,	$+(\pi + a)$,

$$\begin{cases} +\sin a, & +\cos a, & +\tan a, & +\cot a, & +\sec a, \\ +\sin a, & -\cos a, & -\tan a, & -\cot a, & -\sec a, \\ -\sin a, & -\cos a, & +\tan a, & +\cot a, & -\sec a, \\ -\sin a, & +\cos a, & -\tan a, & -\cot a, & +\sec a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\cos a, & +\sin v.\ a, & +\cos v.\ a. \\ +\cos a, & +2-\sin v.\ a, & +\cos v.\ a. \\ -\cos a, & +2-\sin v.\ a, & +2-\cos v.\ a. \\ -\cos a, & +\sin v.\ a, & +2-\cos v.\ a. \end{cases}$$

System der Bogen, deren letzter Punkt auf das erste Viertel des Umkreises fällt	$-(3\pi+a)$, $+(4\pi+a)$,
System der Bogen, deren letzter Punkt auf das zweyte Viertel des Umkreises fällt	$-(3\pi-a)$, $+(4\pi-a)$,
System der Bogen, deren letzter Punkt auf das dritte Viertel des Umkreises fällt	$-(\pi+a)$, $+(2\pi+a)$,
System der Bogen, deren letzter Punkt auf das vierte Viertel des Umkreises fällt	$-(\pi-a)$, $-(2\pi-a)$,

$$\begin{cases} +\cos a, & +\sin a, & +\cot a, & +\tan a, & +\operatorname{cosec} a, \\ +\cos a, & -\sin a, & -\cot a, & -\tan a, & -\operatorname{cosec} a, \\ -\cos a, & -\sin a, & +\cot a, & +\tan a, & -\operatorname{cosec} a, \\ -\cos a, & +\sin a, & -\cot a, & -\tan a, & +\operatorname{cosec} a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} +\sec a, & +\cos v.\,a, & +\sin v.\,a. \\ +\sec a, & +2-\cos v.\,a, & +\sin v.\,a. \\ -\sec a, & +2-\cos v.\,a, & +2-\sin v.\,a. \\ -\sec a, & +\cos v.\,a, & +2-\sin v.\,a. \end{cases}$$

Da das Urſyſtem, auf das ſich dieſe vier Tafeln beziehen, immer das erſte Viertel des Umkreiſes iſt, d. h. das der Bogen $\widehat{AB}$, $\widehat{AF}$, $\widehat{BF}$, und der Linien BD, BE, AD u. ſ. w., ſo folgt, daſs in jeder der vier horizontalen Linien von jeder der vier Tafeln der erſte Ausdruck den correlativen Werth des Bogens, der $\widehat{AB}$ entſpricht, bezeichnet, der zweyte den correlativen Werth ſeines Complements, der dritte den correlativen Werth ſeines Sinus, der vierte den correlativen Werth ſeines Coſinus u. ſ. w., d. h. alle dieſe Werthe ſind bloſse algebraiſche Formen, welche die Eigenſchaft haben, daſs, wenn ſie ſtatt der wahren Quantitäten, welche ſie vorſtellen, in eine Rechnung geſetzt werden, welche auf die Hypotheſe gegründet iſt, daſs die Bogen poſitiv und kleiner als π wären, ſie dieſe Reſultate auf alle andere Bogen anwendbar machen, die in jeder Richtung von 0, bis zum ganzen Umkreiſe 4π begriffen ſind.

116. Vereinigt man dieſe vier Tafeln, ſo erhält man dieſe Reihe von Gleichungen.

$$1.\quad \left\{\begin{array}{lcl} \sin \pm a & = & \pm \sin a \\ \cos \pm a & = & + \cos a \\ \text{tang} \pm a & = & \pm \text{tang}\ a \\ \cot \pm a & = & \pm \cot a \\ \sec \pm a & = & + \sec a \\ \text{cosec} \pm a & = & \pm \cos a \\ \sin v. \pm a & = & + \sin v.\ a \\ \cos v. + a & = & + \cos v.\ a \\ \cos v. - a & = & + (2 - \cos v.\ a) \end{array}\right.$$

$$2.\quad \left\{\begin{array}{lcl} \sin (\pi \pm a) & = & + \cos a \\ \cos (\pi \pm a) & = & \mp \sin a \\ \text{tang} (\pi \pm a) & = & \mp \cot a \\ \cot (\pi \pm a) & = & \mp \text{tang}\ a \\ \sec (\pi \pm a) & = & \mp \text{cosec}\ a \\ \text{cosec} (\pi \pm a) & = & + \sec a \\ \sin v. (\pi + a) & = & + (2 - \cos v.\ a) \\ \sin v. (\pi - a) & = & + \cos v.\ a \\ \cos v. (\pi \pm a) & = & + \sin v.\ a \end{array}\right.$$

$$3.\quad \left\{\begin{array}{lcl} \sin (2\pi \pm a) & = & \mp \sin a \\ \cos (2\pi \pm a) & = & - \cos a \\ \text{tang} (2\pi \pm a) & = & \pm \text{tang}\ a \\ \cot (2\pi \pm a) & = & \pm \cot a \\ \sec (2\pi \pm a) & = & - \sec a \\ \text{cosec} (2\pi \pm a) & = & \mp \cos a \\ \sin v. (2\pi \pm a) & = & + (2 - \sin v.\ a) \\ \cos v. (2\pi + a) & = & + (2 - \cos v.\ a) \\ \cos v. (2\pi - a) & = & + \cos v.\ a \end{array}\right.$$

$$4.\quad \left\{ \begin{array}{ll} \sin\,(3\pi \pm a & = -\cos\, a \\ \cos\,(3\pi \pm a) & = \pm \sin\, a \\ \mathrm{tang}\,(3\pi \pm a) & = \mp \cot\, a \\ \cot\,(3\pi \pm a) & = \mp \mathrm{tang}\, a \\ \sec\,(3\pi \pm a) & = \pm \mathrm{cosec}\, a \\ \mathrm{cosec}\,(3\pi \pm a) & = -\sec\, a \\ \sin v.\,(3\pi + a) & = + \cos v.\, a \\ \sin v.\,(3\pi - a) & = + (2 - \cos v.\, a) \\ \cos v.\,(3\pi \pm a) & = + (2 - \sin v.\, a) \end{array} \right.$$

$$5.\quad \left\{ \begin{array}{ll} \sin\,(4\pi \pm a) & = \pm \sin\, a \\ \cos\,(4\pi \pm a) & = + \cos\, a \\ \mathrm{tang}\,(4\pi \pm a) & = \pm \mathrm{tang}\, a \\ \cot\,(4\pi \pm a) & = \pm \cot\, a \\ \sin\,(4\pi \pm a) & = + \sec\, a \\ \mathrm{cosec}\,(4\pi \pm a) & = \pm \mathrm{cosec}\, a \\ \sin v.\,(4\pi \pm a) & = + \sin v.\, a \\ \cos v.\,(4\pi + a) & = + \cos v.\, a \\ \cos v.\,(4\pi - a) & = (2 - \cos v.\, a). \end{array} \right.$$

Diese Gleichungen werden so gebildet. Ich sehe z. B. aus der zweyten Zeile der ersten Tafel, dass $(2\pi - a)$ einer von den correlativen Werthen des Bogens a ist, also ist der correlative Werth seines Sinus $\sin\,(2\pi - a)$; aber von einer andern Seite sehe ich aus dem dritten Ausdruck derselben Linie, dass $+ \sin\, a$ auch der correlative Werth des Sinus eben des Bogens $(2\pi - a)$ ist. Ich schliesse also, dass $\sin\,(2\pi - a) = + \sin\, a$. Eben so, da der erste Ausdruck der correlative Werth von a ist, wird der correlative Werth des Cosinus dieses Bogens $(2\pi - a) = \cos\,(2\pi - a)$ seyn; aber von einer andern Seite sehe ich aus dem vierten

vierten Ausdruck derselben Zeile, dass derselbe correlative Werth $-\cos a$ ist; ich schliesse also, dass $\cos(2\pi - a) = -\cos a$. Eben so wird mit den andern verfahren.

Diese Gleichungen sind, wie man sieht, rein algebraisch, d. h. sie bestehen nicht unter wirklichen Quantitäten, sondern unter ihren correlativen Werthen, und bedeuten, dass man in jeder Rechnung diese correlativen Werthe für die wirklichen Quantitäten des Ursystems setzen kann, welche sie darstellen, ohne der Genauigkeit des Resultats zu schaden. Sie machen bloss dieses Resultat anwendbar auf Fälle, die nicht im Ursystem begriffen sind, auf das die Betrachtungen gegründet werden.

117. Setzt man in diesen Gleichungen $a = 0$, so bringt man sie auf folgende Formeln zurück:

$$1.\ \begin{cases} \sin 0 = 0 \\ \cos 0 = 1 \\ \tan 0 = 0 \\ \cot 0 = \infty \\ \sec 0 = 1 \\ \mathrm{cosec}\, 0 = \infty \\ \sin v.\ 0 = 0 \\ \cos v.\ 0 = 1 \end{cases}$$

2.

$\sin \pi = 1$
$\cos \pi = 0$
$\tan \pi = \infty$
$\cot \pi = 0$
$\sec \pi = \infty$
$\operatorname{cosec} \pi = 1$
$\sin v.\ \pi = 1$
$\cos v.\ \pi = 0$

3.

$\sin 2\pi = 0$
$\cos 2\pi = -1$
$\tan 2\pi = -0$
$\cot 2\pi = -\infty$
$\sec 2\pi = -1$
$\operatorname{cosec} 2\pi = \infty$
$\sin v.\ 2\pi = 2$
$\cos v.\ 2\pi = 1$

4.

$\sin 3\pi = -1$
$\cos 3\pi = 0$
$\tan 3\pi = -\infty$
$\cot 3\pi = -0$
$\sec 3\pi = \infty$
$\operatorname{cosec} 3\pi = -1$
$\sin v.\ 3\pi = 1$
$\cos v.\ 3\pi = 2$

5.

$\sin 4\pi = 0$
$\cos 4\pi = 1$
$\tan 4\pi = 0$
$\cot 4\pi = \infty$
$\sec 4\pi = 1$
$\operatorname{cosec} 4\pi = \infty$
$\sin v.\ 4\pi = 0$
$\cos v.\ 4\pi = 1$

118. Die bisher gefundenen Formeln beziehen sich nur auf positive oder negative Bogen, von o bis 4π; aber es ist leicht einzusehen, dass man nichts am Werth der Lineo-angulair-Quantitäten verändert, wenn man zu dem betrachteten Bogen einen oder mehrere ganze Umkreise fügt, sie mögen direkt oder invers seyn; d. h. $4m\pi$, wo m jede positive oder negative ganze Zahl ausdrückt. Die (116) gefundenen Gleichungen können dann in folgende Tafel gebracht werden:

$$1. \begin{cases} \sin(4m\pi \pm a) = \pm \sin a \\ \sin((4m+1)\pi \pm a) = + \cos a \\ \sin((4m+2)\pi \pm a) = \mp \sin a \\ \sin((4m+3)\pi \pm a) = - \cos a \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} \cos(4m\pi \pm a) = + \cos a \\ \cos((4m+1)\pi \pm a) = \mp \sin a \\ \cos((4m+2)\pi \pm a) = - \cos a \\ \cos((4m+3)\pi + a) = \pm \sin a \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} \text{tang}(4m\pi + a) = + \text{tang}\, a \\ \text{tang}((4m+1)\pi \pm a) = \mp \cot a \\ \text{tang}((4m+2)\pi \pm a) = \pm \text{tang}\, a \\ \text{tang}((4m+3)\pi \pm a) = \mp \cot a \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} \cot(4m\pi \pm a) = \pm \cot a \\ \cot((4m+1)\pi \pm a) = \mp \text{tang}\, a \\ \cot((4m+2)\pi \pm a) = \pm \cot a \\ \cot((4m+3)\pi \pm a) = \mp \text{tang}\, a \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} \sec(4m\pi \pm a) = + \sec a \\ \sec((4m+1)\pi \pm a) = \mp \text{cosec}\, a \\ \sec((4m+2)\pi \pm a) = - \sec a \\ \sec((4m+3)\pi \pm a) = \pm \text{cosec}\, a \end{cases}$$

$$6.\left\{\begin{array}{lll} cosec\,(4m\pi \pm a) & = & \pm\, cosec\, a \\ cosec\,((4m+1)\,\pi \pm a) & = & +\, sec\, a \\ cosec\,((4m+2)\,\pi \pm a) & = & \mp\, cosec\, a \\ cosec\,((4m+3)\,\pi \pm a) & = & -\, sec\, a \end{array}\right.$$

$$7.\left\{\begin{array}{lll} sin\, vers\,(4m\pi \pm a) & = & +\, sin\, vers\, a \\ sin\, vers\,((4m+1)\pi \pm a) & = & \left\{\begin{array}{l} 2 - cos\, vers\, a \\ +\, cos\, vers\, a \end{array}\right. \\ sin\, vers\,((4m+2)\pi \pm a) & = & 2 - sin\, vers\, a \\ sin\, vers\,((4m+3)\,\pi \pm a) & = & \left\{\begin{array}{l} +\, cos\, vers\, a \\ 2 - cos\, vers\, a \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$8.\left\{\begin{array}{lll} cos\, vers\,(4m\pi \pm a) & = & \left\{\begin{array}{l} +\, cos\, vers\, a \\ 2 - cos\, vers\, a \end{array}\right. \\ cos\, vers\,((4m+1)\pi \pm a) & = & +\, sin\, vers\, a \\ cos\, vers\,((4m+2)\pi + a) & = & \left\{\begin{array}{l} 2 - cos\, vers\, a \\ +\, cos\, vers\, a \end{array}\right. \\ cos\, vers\,((4m+3)\pi \pm a) & = & 2 - sin\, vers\, a \end{array}\right.$$

119. In dieſer letzten Tafel nimmt man noch an, daſs der Bogen a wirklich ſey; aber man kann (56) jetzt willkührlich ſein Zeichen oder den natürlichen Coefficienten 1 in irgend ein anderes Zeichen verändern, das man aus den wirklichen oder eingebildeten Wurzeln der Einheit nimmt, ohne daſs dieſe Gleichungen aufhören algebraiſch genau zu ſeyn. Gelangt man durch beliebige regelmäſsige Umformungen dahin, das Unverſtändliche, was ſie enthalten könnten, verſchwinden zu laſſen, ſo werden die Reſultate dann bedeutend und unmittelbar auf die enthaltenen Quantitäten anwendbar ſeyn.

Ich bin bey dieſem bekannten Beyſpiel etwas weitläuftig geweſen, um die vorher aufgeſtellten

Grundſätze mehr zu entwickeln, und zu zeigen, wie weſentlich es iſt, das veränderliche Syſtem ſtets auf ein Urſyſtem zu beziehen, wenn man immer nur auf eine deutliche und dem Geiſte genugthuende Art verfahren will. Noch mehr, dieſer Gang bringt keine neue Schwierigkeiten, dient aber im Gegentheil, um vielen zuvor zu kommen.

Die Erfindung der Lineo-angulär-Quantitäten verdankt ihren Urſprung den Bemühungen, die man gemacht hat, die Auflöſung der Dreyecke zu finden. Man muſste bald gewahr werden, daſs dieſe Auflöſung überhaupt ſich immer auf die der rechtwinklichten Dreyecke zurückbringen läſst. Alſo nahm man als Maaſsſtab zur Vergleichung ein rechtwinklichtes Dreyeck mit gegebener Grundlinie an, deſſen Hypothenuſe z. B. durch 1 vorgeſtellt war; man hat dieſs Dreyeck für alle mögliche Fälle nach dieſer Hypotheſe berechnet, und Tafeln gemacht, wo man dieſe Rechnung ſchon ganz vollendet findet; dieſe Tafeln ſind eben die, welche man Sinustafeln nennt. Lacroix giebt ſchon lange in ſeinen Vorleſungen dieſe richtige und lichtvolle Darſtellung, und mit ihr hat er den Plan ſeiner Trigonometrie gegründet.

120. Eine beliebige gerade Linie $\overline{BC}$ (*Fig.* 42.) ſey als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen; wir wollen ſie durch 1 vorſtellen, und auf derſelben Linie, als Hypothenuſe, ein rechtwinklichtes Dreyeck *ABC* errichten, indem wir nach und nach den ſpitzen Winkeln alle mögliche Werthe von o bis π geben. Dann entwerfen wir eine Tafel dieſer Dreyecke; in die erſte Spalte ſetzen wir die Zahl der Grade eines der

Winkel; in die zweyte den Werth der kleinen Seite, die ihm gegenüber steht, d. h. die abstrakte Zahl, die ihn darstellt, wenn die Hypothenuse durch 1 ausgedrückt ist, so wie man annahm; in die dritte den Werth der andern kleinen Seite; in die vierte das Verhältnifs der ersten kleinen Seite zur zweyten; in die fünfte das Verhältnifs der zweyten zur ersten; und in die sechste endlich den andern spitzigen Winkel. Diefs festgesetzt, so sieht man aus den bekannten Eigenschaften der rechtwinklichten Dreyecke, dafs die, in die zweyte Spalte geschriebene, Zahl der Sinus des Winkels ist, der in der ersten Spalte steht; die Zahl der dritten, der Cosinus; die Zahl der vierten, die Tangente; die der fünften, die Cotangente, und endlich die der sechsten, das Complement des ersten Winkels. Daraus folgt, dafs die Tafel, die aus diesen verschiedenen Spalten entsteht, nichts anders ist, als die gewöhnliche Tafel der Sinus, Cosinus u. s. w., und dafs jede Horizontallinie dieser Tafeln die vollendete Berechnung eines rechtwinklichten Dreyecks ist, desjenigen nämlich, an dessen zwey spitzigen Winkeln der eine in der ersten, der andere in der letzten Spalte steht. Endlich enthält diese Horizontallinie nicht allein unter der Benennung, Sinus und Cosinus, die Werthe der kleinen Seiten des Dreyecks, sondern auch unter der Benennung Tangente, das Verhältnifs der ersten zur zweyten, und unter der Benennung Cotangent, das Verhältnifs der zweyten zur ersten, dafs also die Tafel der Sinus, Cosinus u. s. w. nichts anders ist, als die vollständig geführte Berechnung aller möglichen Fälle des recht-

winklichten Dreyecks, dessen Hypothenuse durch 1 ausgedrückt ist.

Wenn man also ein rechtwinklichtes Dreyeck zu berechnen hat, besteht die ganze Schwierigkeit darin, die ihm entsprechende Horizontallinie der Tafeln zu finden; denn diese Linie ist die vollständig geführte Berechnung für das Dreyeck. Z. B. wenn man die zwey kleinen Seiten a, b eines rechtwinklichten Dreyecks kennt, braucht man nur a durch b zu theilen, und der Quotient $\frac{a}{b}$ stellt nach dem, was eben gesagt ist, die Tangente des Winkels vor, der der kleineren Seite a gegenüber steht; sucht man also die Zahl $\frac{a}{b}$ in der vierten Spalte, so enthält die Horizontallinie der Tafeln, in der sie sich findet, die vollständig geführte Berechnung des aufgegebenen Dreyecks; d. h. in der ersten und sechsten Spalte sind die Winkel, in der zweyten und dritten die Werthe der diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten, wenn man die Hypothenuse $= 1$ annimmt, und endlich in der vierten und fünften die Verhältnisse dieser Seiten unter einander, nämlich in der vierten das Verhältniss der ersten zur zweyten, und in der fünften das der zweyten zur ersten. Da nun der absolute Werth der Seiten gegeben ist, erhält man durch eine blosse Proportion den absoluten Werth der Hypothenuse. So geben die Sinustafeln Auflösung aller möglichen rechtwinklichten Dreyecke; und da man leicht die Berechnung der andern auf Berechnung der rechtwinklichten zurückbringen kann, so

ſind die Sinustafeln hinreichend, um alle Dreyecke zu berechnen.

121. Es ſcheint natürlicher, einen Bogen unmittelbar mit ſeiner Sehne ſelbſt zu vergleichen, als mit ſeinem Sinus, der die Hälfte der Sehne eines doppelten Bogens iſt; das that man auch anfangs, und es war möglich, dahin zurückzukommen, ohne daſs die Theorie etwas von ihrer Einfachheit verlöre; ich glaube ſelbſt, daſs ſie in der Hinſicht dabey gewönne, in wiefern man es als eine natürlichere Verkettung betrachten kann.

Man beſchreibe (*Fig.* 42.) auf der Hypothenuſe $\overline{BC}$ eines rechtwinklichten Dreyecks *ABC* einen Umkreis, ſo wird er durch *A*, den Scheitelpunkt des rechten Winkels, gehen. Nun iſt, wenn man die Hypothenuſe durch 1 vorſtellt, die Seite $\overline{AB}$ der Sinus von $A\hat{C}B$: denn, wenn man aus dem Mittelpunkt *D* $\overline{DH}$ parallel mit $\overline{AC}$ zieht, ſo fällt ſie auf die Mitte von $\overline{AB}$; alſo (120) der Sinus von $A\hat{D}H$ oder $A\hat{C}B$ iſt $\frac{\overline{AH}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}$ oder weil $\overline{BC} = 1$ $ſin\, ACB = \overline{AB}$, d. h. der Sinus des Winkels *ACB* iſt gleich der Sehne, auf der er ſteht, in dieſem Cirkel, deſſen Durchmeſſer 1 iſt; und da jeder andere Winkel als *AFB*, der auf derſelben Sehne ſteht und ſeinen Scheitel in der Peripherie hat, daſſelbe Maaſs hat: ſo hat ein jeder ſolcher auch, als Sinus, die Sehne, auf der er in dieſem Cirkel ſteht. Alſo überhaupt in dem Cirkel, deſſen Diameter durch 1 vorgeſtellt iſt, iſt der Sinus jedes Peripheriewinkels gleich der Sehne, auf der er ſteht. Und

weil in Cirkeln von verschiedenen Durchmessern diese Durchmesser sich verhalten wie die Sehnen, auf denen gleiche Peripheriewinkel stehen, so kann man überhaupt sagen: der Sinus jedes Peripheriewinkels ist gleich der Sehne, auf der er steht, durch den Durchmesser getheilt.

Aus diesem Gesichtspunkte werde ich die Theorie der Lineo-angulär-Quantitäten in folgender Aufgabe betrachten.

Siebente Aufgabe.

122. Die Tafel der vorzüglichsten Verhältnisse zwischen Sinus und Cosinus zweyer gegebenen Winkel, Sinus und Cosinus ihrer Summe, und Sinus und Cosinus ihres Unterschiedes, zu bilden.

m und n seyen die beyden gegebenen Winkel, die ich anfangs, jeden einzelnen sowohl als ihre Summe $m+n$, kleiner als π annehme, unter ihnen sey $m > n$.

Wir wollen willkührlich eine Linie $\overline{AD}$ (*Fig.* 43.) ziehen, und auf der einen Seite dieser Linie $B\hat{A}D = m$, auf der andern $C\hat{A}D = n$ nehmen. Durch einen willkührlichen Punkt E auf $\overline{AD}$ ziehen wir BC perpendikulär darauf, beschreiben um das Dreyeck ABC einen Kreis, dessen Durchmesser wir, um es einfacher zu machen, durch 1 vorstellen; endlich ziehen wir die beyden Linien $\overline{BD}$, $\overline{CD}$, und nehmen $\overline{EF} = \overline{CE}$, $\overline{EH} = \overline{DE}$; dann wird man folgende Formeln erhalten, welche die gesuchten Verhältnisse ausdrücken.

Tafel der vorzüglichſten Verhältniſſe zwiſchen Sinus und Coſinus zweyer beliebigen Winkel, Sinus und Coſinus ihrer Summe und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes.

1) $BD = \text{ſin}\ m$

2) $CD = \text{ſin}\ n$

3) $AC = \text{coſ}\ m$

4) $AB = \text{coſ}\ n$

5) $BC \begin{cases} = \text{ſin}\ (m + n) \\ = \text{ſin}\ m\ \text{coſ}\ n + \text{ſin}\ m\ \text{ſin}\ n \end{cases}$

6) $AD \begin{cases} = \text{coſ}\ (m - n) \\ = \text{coſ}\ m\ \text{coſ}\ n + \text{ſin}\ m\ \text{ſin}\ n \end{cases}$

7) $BF \begin{cases} = \text{ſin}\ (m - n) \\ = \text{ſin}\ m\ \text{coſ}\ n - \text{ſin}\ n\ \text{coſ}\ m \end{cases}$

8) $AH \begin{cases} = \text{coſ}\ (m + n) \\ = \text{coſ}\ m\ \text{coſ}\ n - \text{ſin}\ m\ \text{ſin}\ n \end{cases}$

9) $BE \begin{cases} = \text{ſin}\ m\ \text{coſ}\ n \\ = \frac{1}{2}\,\text{ſin}\ (m + n) + \frac{1}{2}\,\text{ſin}\ (m - n) \end{cases}$

10) $CE \begin{cases} = \text{ſin}\ n\ \text{coſ}\ m \\ = \frac{1}{2}\,\text{ſin}\ (m + n) - \frac{1}{2}\,\text{ſin}\ (m - n) \end{cases}$

11) $DE \begin{cases} = \text{ſin}\ m\ \text{ſin}\ n \\ = \frac{1}{2}\,\text{coſ}\ (m - n) - \frac{1}{2}\,\text{coſ}\ (m + n) \end{cases}$

12) $AE \begin{cases} = \text{coſ}\ m\ \text{coſ}\ n \\ = \frac{1}{2}\,\text{coſ}\ (m - n) + \frac{1}{2}\,\text{coſ}\ (m + n) \end{cases}$

123. Aus dieſen erſten Formeln haben die Mathematiker eine Menge anderer abgeleitet, die eben ſo ſcharfſinnig, als wichtig ſind. Die folgende Tafel enthält einige, die ich in der Folge nöthig haben könnte.

Tafel der vorzüglichsten Verhältnisse zwischen den Lineo-angulär-Quantitäten zweyer beliebigen Winkel.

1.

$$\sin(m \pm n) = \sin m \cos n \pm \sin n \cos m$$

$$\cos(m \pm n) = \cos m \cos n \mp \sin m \sin n$$

$$\tan(m \pm n) = \frac{\tan m \pm \tan n}{1 \mp \tan m \tan n}$$

$$\cot(m \pm n) = \frac{1 \mp \cot m \cot n}{\cot m \pm \cot n}$$

2.

$$\sin m \cos n = \tfrac{1}{2} \sin(m+n) + \tfrac{1}{2} \sin(m-n)$$

$$\cos m \sin n = \tfrac{1}{2} \sin(m+n) - \tfrac{1}{2} \sin(m-n)$$

$$\cos m \cos n = \tfrac{1}{2} \cos(m+n) + \tfrac{1}{2} \cos(m-n)$$

$$\sin m \sin n = \tfrac{1}{2} \cos(m-n) - \tfrac{1}{2} \cos(m+n)$$

$$\tan m \tan n = \frac{\cos(m-n) - \cos(m+n)}{\cos(m+n) + \cos(m-n)}$$

$$\tan m \cot n = \frac{\sin(m+n) + \sin(m-n)}{\sin(m+n) - \sin(m-n)}$$

$$\cot m \tan n = \frac{\cos(m+n) + \cos(m-n)}{\sin(m+n) + \sin(m-n)}$$

$$\cot m \cot n = \frac{\cos(m+n) + \cos(m-n)}{\cos(m-n) - \cos(m+n)}$$

$$3.\begin{cases}
\sin m + \sin n = 2 \sin \dfrac{m+n}{2} \,.\, \cos \dfrac{m-n}{2} \\[2ex]
\sin m - \sin n = 2 \cos \dfrac{m+n}{2} \,.\, \sin \dfrac{m-n}{2} \\[2ex]
\cos m + \cos n = 2 \cos \dfrac{m+n}{2} \,.\, \cos \dfrac{m-n}{2} \\[2ex]
\cos n - \cos m = 2 \sin \dfrac{m+n}{2} \,.\, \sin \dfrac{m-n}{2} \\[2ex]
\text{tang}\, m + \text{tang}\, n = \dfrac{\sin (m+n)}{\cos m \cos n} \\[2ex]
\text{tang}\, m - \text{tang}\, n = \dfrac{\sin (m-n)}{\cos m \cos n} \\[2ex]
\cot m + \cot n = \dfrac{\sin (m+n)}{\sin m \sin n} \\[2ex]
\cot n - \cot m = \dfrac{\sin (m-n)}{\sin m \sin n}
\end{cases}$$

$$4.\begin{cases}
\sin m^2 - \sin n^2 = \sin (m+n).\ \sin (m-n) \\[1ex]
\cos m^2 - \sin n^2 = \cos (m+n).\ \cos (m-n) \\[1ex]
\text{tang}\, m^2 - \text{tang}\, n^2 = \dfrac{\sin (m+n).\ \sin (m-n)}{\cos m^2.\ \cos n^2} \\[2ex]
\cot n^2 - \cot m^2 = \dfrac{\sin (m+n).\ \sin (m-n)}{\sin m^2.\ \sin n^2}
\end{cases}$$

$$5.\begin{cases}
\dfrac{\sin m + \sin n}{\sin m - \sin n} = \dfrac{\text{tang}\, \frac{1}{2} (m+n)}{\text{tang}\, \frac{1}{2} (m-n)} \\[2ex]
\dfrac{\sin m + \sin n}{\cos m + \cos n} = \text{tang}\, \tfrac{1}{2} (m+n) \\[2ex]
\dfrac{\sin m + \sin n}{\cot n - \cos m} = \cot \tfrac{1}{2} (m-n) \\[2ex]
\dfrac{\sin m - \sin n}{\cos m + \cos n} = \text{tang}\, \tfrac{1}{2} (m-n) \\[2ex]
\dfrac{\sin m - \sin n}{\cos n - \cos m} = \cot \tfrac{1}{2} (m+n) \\[2ex]
\dfrac{\cos m + \cos n}{\cos n - \cos m} = \dfrac{\cot \frac{1}{2} (m+n)}{\text{tang}\, \frac{1}{2} (m+n)} = \dfrac{\sec m + \sec n}{\sec m - \sec n}
\end{cases}$$

$$6. \begin{cases} \sin 2\,m = 2 \sin m \cos m \\ \cos 2\,m = \cos m^2 - \sin m^2 \\ \tang 2\,m = \dfrac{2 \tang m}{1 - \tang m^2} \\ \cot 2\,m = \frac{1}{2} \cot m - \frac{1}{2} \tang m \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} \sin \frac{1}{2} m = \sqrt{\dfrac{(1 - \cos m)}{2}} \\ \cos \frac{1}{2} m = \sqrt{\dfrac{(1 + \cos m)}{2}} \\ \tang \frac{1}{2} m = \dfrac{\sin m}{1 + \cos m} \\ \cot \frac{1}{2} m = \dfrac{\sin m}{1 - \cos m} \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 1)\ \sin m^2 + \cos m^2 = 1,\ \sin m^2 = \dfrac{\tang m^2}{1 + \tang m^2} \\ 2)\ \cos m^2 = \dfrac{1}{1 + \tang m^2} \\ 3)\ \cos m^4 - \sin m^4 = \cos m^2 - \sin m^2 = \cos 2\,m \\ 4)\ \sin m^2 .\ \sin n^2 + \cos m^2 \cos n^2 + \sin m^2 .\ \cos n^2 \\ \qquad + \sin n^2 .\ \cos m^2 = 1. \end{cases}$$

Die Formeln der erſten Tafel (122) werden ſo bewieſen:

Wenn man den Durchmeſſer nach der Hypotheſe durch 1 vorſtellt, ſo hat jeder Peripheriewinkel nach (121) die Sehne, auf der er ſteht, zum Sinus, alſo $\overline{BD} = \sin m$, $\overline{CD} = \sin n$, wie in der Tafel; noch mehr, da $E = \pi$, ſo iſt $A\hat{B}C$ das Complement von n, alſo auch $\overline{AC} = \cos m$, $\overline{AB} = \cos n$.

Aus demſelben Grunde, da $B\hat{A}C = m + n$, hat man $\overline{BC} = \sin (m + n)$, wie die Tafel anzeigt.

Der Winkel ABD beſteht aus $ABC = \pi - m$

(weil ABE ein rechtwinklichtes Dreyeck ist), und $CBD = n$ (weil CBD, als Peripheriewinkel, mit n auf einem Bogen steht) ist also $\pi - m + n = \pi - (m - n)$, oder das Complement von $m - n$, also $\overline{AD} = cos\,(m - n)$, wie man es in der Tafel sieht.

Wir wollen $\overline{AF}$, bis G verlängert, an den Umkreis führen, und $\overline{BG}$ ziehen, weil man nach der Construktion $\overline{FE} = \overline{EC}$ hat, so wird man auch $G\hat{A}D = D\hat{A}C = n$ haben, also $B\hat{A}G = m - n$, also $\overline{BG} = sin\,(m - n)$.

Nun sieht man leicht, dass das Dreyeck BGF gleichschenklicht ist, denn der Winkel $B\hat{F}G$, oder $A\hat{F}C$, ist nach der Construktion $= A\hat{C}B$, der auf demselben Bogen mit $B\hat{G}A$ steht; also ist $B\hat{F}G = B\hat{G}A$ und $\overline{BF} = \overline{BG}$, also $\overline{BF} = sin\,(m - n)$. Und durch ähnliche Betrachtungen findet man $\overline{AH} = cos\,(m + n)$.

Die Summe der beyden Segmente $\overline{BE}$, $\overline{CE}$ ist $\overline{BC} = sin\,(m + n)$, und ihr Unterschied ist BF oder $sin\,(m - n)$, also ist das grösste

$\overline{BE} = \frac{1}{2}\,sin\,(m + n) + \frac{1}{2}\,sin\,(m - n)$, und das kleinste

$\overline{CE} = \frac{1}{2}\,sin\,(m + n) - \frac{1}{2}\,sin\,(m - n)$, so wie es in der Tafel steht, und durch ähnliche Betrachtungen sieht man, dass

$\overline{AE} = \frac{1}{2}\,cos\,(m - n) + \frac{1}{2}\,cos\,(m + n)$ und

$\overline{DE} = \frac{1}{2}\,cos\,(m - n) - \frac{1}{2}\,cos\,(m + n)$.

Von einer andern Seite giebt das Dreyeck ABE

$\overline{AB}$ oder $cos\,n : \overline{BE} = 1 : sin\,m$, also $\overline{BE} = sin\,m\,cos\,n$.

Eben ſo geben die Dreyecke ACE, BDE, DCE $\overline{CE} = \text{ſin}\ n\ \text{coſ}\ m$, $\overline{AE} = \text{coſ}\ m\ \text{coſ}\ n$, $\overline{DE} = \text{ſin}\ m\ \text{ſin}\ n$.

Addirt man die erſte und zweyte der letzten Gleichungen, ſo hat man $\overline{BE} + \overline{CE}$, oder einen neuen Werth von $\overline{BC} = \text{ſin}\ m\ \text{coſ}\ n + \text{ſin}\ n\ \text{coſ}\ m$, wie in der Tafel. Subtrahirt man im Gegentheil $\overline{CE}$ von $\overline{BE}$, ſo hat man $\overline{BF} = \text{ſin}\ m\ \text{coſ}\ n - \text{ſin}\ n\ \text{coſ}\ m$.

Addirt und ſubtrahirt man nach einander $\overline{AE}$ und $\overline{DE}$, ſo erhält man die zweyten Werthe von $\overline{AD}$, $\overline{AH}$, wie ſie in der Tafel ſtehen. So werden alle Formeln dieſer Tafel bewieſen.

124. Bey der zweyten Tafel (123) beweiſet man die beyden erſten Formeln, indem man die doppelten Werthe der fünften, ſechſten, ſiebenten und achten Formel der erſten Tafel gleich ſetzt, und dieſe beyden Formeln ſind genug, um alle andern zu beweiſen. Da ſich das in den gewöhnlichen Abhandlungen der Trigonometrie findet, ſo verweiſe ich darauf um ſo mehr, da mein Zweck nicht iſt, ein vollſtändiges Werk über dieſen Gegenſtand zu ſchreiben, ſondern bloſs die Aufgabe unter einen neuen Geſichtspunkt zu bringen.

Doch will ich mich noch dieſer Figur bedienen, um, ohne eine andere zu Hülfe zu nehmen, den Satz $\text{ſin}\ m^2 + \text{coſ}\ m^2 = 1$ zu beweiſen. In der That, da $A\hat{E}C$ ein rechter Winkel iſt, ſo macht die Summe der beyden Bogen $\frown{AC}$, $\frown{BD}$, deren Hälfte ihm zum Maaſse dient, zwey Rechte; alſo iſt die Sehne der Summe dieſer beyden Bogen ein Durchmeſſer; alſo machen die beyden Sehnen einen rechten

Winkel, alſo iſt die Summe ihrer Quadrate gleich dem Quadrate des Diameters, welches nach der Hypotheſe 1 iſt, alſo $ſin\ m^2 + coſ\ m^2 = 1$. Wegen des rechtwinklichten Dreyecks AEC, hat man $\overline{AC}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{CE}^2$ und $\overline{BD}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{DE}^2$; addirt man dieſe Gleichungen, ſo hat man, weil $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 1$, wie wir eben ſahen, auch $\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 1$.

125. Die Betrachtungen ſind auf die Hypotheſe gegründet, daſs m, n ſo wie ihre Summe $m + n$ kleiner als π ſeyen. Jetzt iſt es leicht, die Formeln auf alle mögliche Winkel zu erſtrecken. Man braucht nur (53) die darin befindlichen Quantitäten als bloſse Werthe der Correlation anzuſehen, dieſe Werthe der Correlation für irgend einen andern Zuſtand des Syſtems zu ſuchen, und ſie in die Formeln zu ſetzen.

Wir wollen z. B. annehmen, daſs $\overline{BC}$ ſich, mit ſich ſelbſt parallel, bewege, indem ſie ſich dem Punkte A bis über den Mittelpunkt des Cirkels nähert, ſo wird der Winkel BAC oder $m + n$ ſtumpf, aber weder m, noch n ſind durch o oder durch ∞ gegangen; alſo können auch ihre Zeichen der Correlation ſich nicht in den gefundenen Formeln ändern, alſo bleiben die zweyten Glieder dieſer Formeln, aber bey den erſten wird $\overline{AH}$ negativ, weil $coſ\ (m + n)$ negativ iſt, wenn $m + n > \pi$.

Jetzt wollen wir uns vorſtellen, daſs $\overline{BC}$ ſich, mit ſich ſelbſt parallel, nach der entgegengeſetzten Richtung bewege, d. h. indem ſie ſich vom Punkte A entfernt, und daſs nachher $\overline{AD}$ ſich auch, mit ſich ſelbſt parallel bewege, indem ſie ſich vom Mittelpunkte entfernt, bis E, der Durchſchnittspunkt dieſer

Linie,

Linie, mit $\overline{BC}$ auſserhalb des Cirkels fällt (*Fig.* 43. *), dann wird $\hat{n}$ oder $C\hat{A}D$ ſtumpf geworden ſeyn.

In der That iſt dieſer Winkel durch o gegangen, in dem Augenblicke, wo E ſich mit dem Umkreiſe befand, und folglich mit C und D zuſammenfiel. Noch mehr im Urſyſtem hatte man $C\hat{A}E = C\hat{A}B - B\hat{A}E$, dagegen im neuen Syſtem $C\hat{A}E = B\hat{A}E - C\hat{A}B$. Der Winkel m bleibt direkt, weil er weder durch o, noch durch ∞ geht.

Um alſo zu wiſſen, was auf dieſen Fall die Formeln werden, braucht man nur im zweyten Gliede jeder das Zeichen von n zu verändern, und man wird den Werth der Correlation des erſten Gliedes finden; ſo z. B. wird man ſehen, daſs $\overline{CD}$ invers wird, weil ihr Werth $\sin - n$ oder $-\sin n$ wird (116), und eben das iſt der Fall bey $\overline{CE}$, $\overline{DE}$.

Man kann auch unmittelbar an jeder der Quantitäten, die in dieſes erſte Glied kommen, ſehen, welche invers werden, wenn man die Figur entwirft, die dieſer zweyten Hypotheſe entſpricht, d. h. dem Falle, wo n invers wird. Wenn man Schritt vor Schritt der Conſtruktion der vorigen Figur folgt, indem man n invers macht, d. h. indem man annimmt, daſs dieſer Winkel erſt unmerklich bis Null abnimmt, oder daſs der Punkt C ſich dem Punkte D unmerklich nähere, bis er in ihm fällt, dann darüber hinausgehe, und ſich zwiſchen B und D ſtelle, ſo erhält man die Figur, welche durch Vergleichung mit der Urfigur zeigt, welche Quantitäten invers geworden ſind. So ſieht man, wie vorhin, daſs $\overline{DE}$ es geworden ſeyn wird, weil man im neuen Syſtem

$\overline{DE} = \overline{AE} - \overline{AD}$ hat, da man im Urſyſtem $\overline{DE} = \overline{AD} - \overline{AE}$ hatte. Eben ſo iſt $\overline{CE}$ invers, weil man im erſten Syſtem $\overline{CE} = \overline{BC} - \overline{BE}$ hatte, dagegen im zweyten $\overline{CE} = \overline{BE} - \overline{BC}$ iſt.

Auch $\overline{CD}$ iſt invers geworden (116), weil es der Sinus des Winkels CAD iſt, von dem wir eben erfahren haben, daſs er invers geworden ſey. Von den Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{BC}$, $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, $\overline{AE}$ iſt keine durch o oder durch ∞ gegangen, ſie ſind alſo direkt geblieben. Alſo um auf den neuen Fall die im Urſyſtem gefundenen Formeln anzuwenden, braucht man nur darin das Zeichen der Quantitäten, n, $\overline{CD}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ zu verändern, oder folgende Correlation mit dem Urſyſtem aufzuſtellen:

Urſyſtem	$+m$	$+n$	$+\overline{AB}$	$+\overline{AC}$	$+\overline{BD}$	$+\overline{CD}$	$+\overline{BC}$	$+\overline{AD}$	$+BE$	$+\overline{CE}$	$+\overline{AE}$	$+\overline{DE}$.	
Umgeformtes Syſtem	$+n$	$-n$	$+\overline{AB}$	$+\overline{AC}$	$+\overline{BD}$	$-\overline{CD}$	$+\overline{BC}$	$+\overline{AD}$	$+\overline{BE}$	$-\overline{CE}$	$+\overline{AE}$	$-\overline{DE}$.	

Alſo um die Formeln der Urtafel anwendbar auf das neue Syſtem zu machen, muſs man die, durch dieſe Correlation angezeigten, Veränderungen der Zeichen darin vornehmen. Eben ſo wäre es bey jeder andern Umformung.

Die Urfigur ſelbſt, auf welche die Betrachtung gegründet iſt, giebt acht mit dem erſten correlative Syſteme, das mit einbegriffen, weil jeder der vier Winkel, A, B, C, D, zuerſt in der Ordnung auf zwey verſchiedene Arten geſetzt werden kann, aber dieſe Formeln kommen auf folgende vier zurück:

1ſtes Syſtem $ABCDE$
2tes Syſtem $ACBDE$
3tes Syſtem $BDACE$
4tes Syſtem $BADCE$.

Um z. B. auf das vierte die Formel

$$\sin(m+n) = \sin m.\ \cos n + \sin n.\ \cos m$$

anzuwenden, die dem erſten gehört, muſs man die Correlation der abſoluten Werthe und der Zeichen der dahin gehörigen Quantitäten, m, n, $(m+n)$ mit denen, die ſie erſetzen ſollen, aufſtellen:

$$\begin{array}{l} \text{Urſyſtem} \\ \text{Umgeform-} \\ \text{tes Syſtem} \end{array} \left\{ \begin{array}{lll} +m, & +n, & +(m+n). \\ / & & \\ +(\pi-m), & +n, & +\pi-(m-n). \end{array} \right.$$

Im erſten Syſteme hat man $m = B\hat{A}E$. Nun ſieht man aus der Correlation der Conſtruktion, daſs für das vierte Syſtem der Winkel, welcher $B\hat{A}E$ entſpricht, $A\hat{B}E$ iſt, oder $\pi - m$. Eben ſo ſehe ich, daſs der n oder $C\hat{A}D$ entſprechende Winkel für das vierte Syſtem $D\hat{B}C$ oder n iſt; und daſs endlich der Winkel, welcher $B\hat{A}C$ oder $m+n$ entſpricht, $A\hat{B}D$ oder $\pi - m + n$, oder $\pi - (m-n)$ iſt.

Das iſt die Correlation der abſoluten Werthe, die der Zeichen iſt direkt, weil das erſte Syſtem durch eine allmähliche Umformung offenbar dem zweyten ganz gleich werden kann, ohne daſs einer der Winkel m, n, $m+n$ durch o oder durch ∞ gehe. Alſo iſt die Correlation ſo, wie wir ſie vorher dargeſtellt haben, alſo wird die Formel, die wir auf das vierte Syſtem anwenden wollen,

$$\sin(\pi - (m - n)) = \sin(\pi - m) . \cos n + \sin n . \cos(\pi - m) \text{ oder}$$

$$\cos(m - n) = \cos m . \cos n + \sin n . \sin m,$$

welches die achte Formel der ersten Tafel ist.

126. Wir haben gesagt (124), daſs man aus den vier Grundgleichungen, die vorher gefunden worden (erste Tafel, 5. 6. 7. 8.), alle die der zweyten Tafel ziehen kann. Noch mehr, man muſs bemerken, daſs diese vier Gleichungen alle von einer einzigen unter ihnen abgeleitet werden können, z. B. von der ersten, und daſs sie, eigentlich betrachtet, nur dieselbe Gleichung sind, auf verschiedene Arten ausgedrückt. Gleich die zweyte (in der zweyten Tafel) ist nichts anders, als die erste, in der n negativ wird. Jede der zwey ersten Formeln müssen bey jedem Werthe von m und n statt haben, z. B. wenn man $\pi \pm m$ an die Stelle von m setzt, ohne etwas an n zu verändern. Macht man nach der Reihe diese Substitutionen, d. h. setzt man nach einander für m, $\pi + m$ und $\pi - m$, so entstehen die zwey letzten Formeln daraus. So schlieſst die erste alle andern in sich, und umgekehrt; man kann also jede dieser vier Formeln als einen allgemeinen Ausdruck der Verhältnisse ansehen, die zwischen Sinus und Cosinus zweyer Winkel, Sinus und Cosinus ihrer Summe, und Sinus und Cosinus ihres Unterschiedes bestehen.

127. Wenn man in den vier Grundformeln (5. 6. 7. 8. der ersten Tafel) anfangs $n = 0$ annimmt, dann nach der Reihe $m = 0$, $m = \pi$, $m = 2\pi$, $m = 3\pi$, $m = 4\pi$, so erhält man die Formeln der Tafel (117). Macht man noch $n = 0$, und nimmt noch die Reihe $m = a$, $m = \pi \pm a$, $m = 2\pi \pm a$, so findet man

die der Tafel (116), wie es auch seyn muſs; weil diese ersten Tafeln und die letzte (123) auf dasselbe Ursystem gegründet sind, d. h. nach derselben Hypothese, daſs die in diese Tafel aufgenommenen Winkel alle kleiner als der rechte Winkel sind.

128. Die Aufgabe, die wir aufgelöst haben, giebt nicht allein die vornehmsten Verhältnisse der Lineo-angulär-Quantitäten zweyer gegebenen Winkel, sondern sie schlieſst auch die Auflösung der allgemeinen Aufgabe der Trigonometrie ein, nämlich der:

Wenn von den sechs Dingen, die bey einem Dreyeck zu betrachten sind, drey gegeben sind (nur nicht die drey Winkel), alle übrigen zu finden.

Denn giebt man ein Dreyeck *ABC* aufzulösen, so braucht man nur, um es in einen Cirkel zu beschreiben, aus dem Winkel *A* einen Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite *BC* zu fällen und die Construktion so zu vollenden, wie sie (*Fig.* 43.) ist. Dann kann man die Formeln der Tafel darauf anwenden, die die Verhältnisse aller Theile dieser Figur ausdrücken, unter denen sich auch die zu betrachtenden sechs Dinge finden. Ich kann mich hier nicht weiter hierüber verbreiten, da ich überdieſs im folgenden Abschnitt darauf zurückkomme. Nur auf einige besondere Folgerungen will ich mich beschränken, die von selbst aus dem Vorhergehenden entspringen.

129. Die Figur 43 ist, wie man sieht, ein im Cirkel beschriebenes Viereck mit rechtwinklichten Diagonalen. Ich bemerke gleich anfangs, daſs $\overline{AFG}$ $\overline{ED}$ perpendikulär in *I* schneidet, denn im Dreyeck

IAD iſt $I\hat{A}D$ nach der Hypotheſe gleich $D\hat{A}C$ oder n, und $I\hat{D}A = B\hat{C}A$ oder $\pi - n$; alſo macht die Summe dieſer beyden Winkel π aus; alſo iſt auch $AID = \pi$, d. h. $\overline{AI}$ iſt perpendikulär auf BD; alſo umgekehrt, wenn man vom Punkte A den Perpendikel $\overline{AI}$ auf $\overline{BD}$ fällt, geht es durch F. Aus eben dem Grunde, wenn man vom Punkte D einen Perpendikel $\overline{DK}$ auf $\overline{AB}$ fällt, geht es auch durch den Punkt F. Alſo ſchneiden ſich im Dreyecke ABD die drey Perpendikel $\overline{AI}$, $\overline{BE}$, $\overline{DK}$, die aus den drey Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, alle im Punkte F.

Man konnte eben ſo beweiſen, daſs im Dreyecke ABC die drey Perpendikel, aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten gezogen, ſich alle im Punkte H ſchnitten, und da die Winkel m, n willkührlich genommen ſind, ſo gehört dieſe Eigenſchaft jedem Dreyecke, d. h. i n j e d e m D r e y e c k e ſ c h n e i d e n d i e d r e y P e r p e n d i k e l, a u s d e n W i n k e l n a u f d i e g e g e n ü b e r ſ t e h e n d e n S e i t e n g e z o g e n, ſ i c h i n e i n e m P u n k t e.

Weil vermöge der Conſtruktion $G\hat{A}D = C\hat{A}D$, ſo iſt auch $\overset{\frown}{GD} = \overset{\frown}{CD}$. Alſo überhaupt, wenn man aus einem willkührlich angenommenen Punkte des Umkreiſes D zwey Chorden $\overline{DB}$, $\overline{DA}$ zieht, und von den Enden A, B die Perpendikel $\overline{AG}$, $\overline{BC}$ darauf fällt, bis an den Umkreis verlängert, ſo ſind die Bogen $\overset{\frown}{DG}$, $\overset{\frown}{DC}$, die zwiſchen dem erſten Punkte und dem neuen Durchſchnittspunkte begriffen ſind, gleich. Daher folgt z. B., daſs, wenn man die Sehne $\overline{CG}$ zieht, ſie perpendikular vom Diameter, den man aus

dem Punkte *D* zöge, durchſchnitten würde, und daſs umgekehrt der Perpendikel aus *D* auf *CG* durch das Centrum gehen würde.

130. Ich habe bewieſen, daſs die Perpendikel aus den drey Winkeln *A*, *B*, *C*, auf die gegenüberſtehenden Seiten, ſich alle in einem Punkte durchſchneiden müſſen, hier in *D* (*Fig.* 44.). Aber jeder der Scheitel *A*, *B*, *C* iſt in dieſer Rückſicht in demſelben Fall wie der Punkt *D*, d. h. eben ſo wie der Punkt *D* der iſt, wo ſich die Perpendikel aus den Winkeln des Dreyecks *ABC* auf die gegenüberſtehenden Seiten durchſchneiden, eben ſo iſt der Punkt *A* z. B., wie man leicht ſieht, der, wo ſich die Perpendikel aus den drey Winkeln des Dreyecks *ABC* auf die ihnen gegenüberſtehenden Seiten durchſchneiden. Eben dieſs iſt bey den andern. So bilden drey beliebige Punkte von den vier Punkten *A*, *B*, *C*, *D* immer ein Dreyeck, wo die drey Perpendikel aus den Winkeln dieſes Dreyecks auf die gegenüberſtehenden Seiten ſich alle im vierten Punkte durchſchneiden. Die Figur iſt alſo ein Syſtem von vier Punkten, wovon zwey und zwey durch Linien verbunden ſind, und zwar ſo, daſs jede Linie, die durch zwey dieſer Punkte geht, die Linie, welche durch die zwey andern geht, perpendikulär ſchneidet.

Noch mehr: dieſe Figur hat die Eigenſchaft, daſs, wenn man durch je drey oder vier Punkte *A*, *B*, *C*, *D* (zum Beyſpiel durch *A*, *B*, *C*) einen Cirkel beſchreibt und den Perpendikel bis an den Umkreis in *A'*, *B'*, *C'* verlängert, daraus drey im Cirkel beſchriebene Vierecke mit rechtwinklichten

Diagonalen entſtehen, ſo wie die, die wir in der Aufgabe (122) unterſucht haben, nämlich $ABA'C$, $BCB'A$, $CAC'B$, in welchen man je zwey vollkommen ähnliche und gleiche Dreyecke hat, BDC und $BA'C$, ABD und $AC'B$, ADC und $AB'C$.

Was ich eben von dem Cirkel geſagt habe, der durch die drey Punkte A, B, C geht, paſst auch auf jeden andern, der durch drey beliebige Punkte von den vieren A, B, C, D geht, wobey man noch bemerken muſs, daſs alle dieſe Cirkel denſelben Durchmeſſer haben, d. h. zum Beyſpiel der Cirkel, der um das Dreyeck BDC beſchrieben wird, iſt gleich dem Cirkel $ABA'C$, weil das Dreyeck BDC vollkommen gleich und ähnlich dem Dreyecke $BA'C$ iſt, welches ſelbſt in dem Cirkel $ABA'C$ beſchrieben iſt.

131. Wenn man aus dem Mittelpunkte L (*Fig.* 43.) ſich einen Perpendikel auf $\overline{BC}$ gezogen vorſtellt, ſo ſieht man leicht, daſs, wenn der Durchmeſſer des Cirkels $= 1$ iſt, der Perpendikel $\frac{1}{2} \cos(BAC)$ oder $\frac{1}{2} \cos(m + n)$ ſeyn wird, aber die Tafel (122) giebt $\overline{AH} = \cos(m + n)$, welches der doppelte iſt. Alſo: I n j e d e m D r e y e c k e i ſ t d e r P e r p e n d i k e l, a u s d e m M i t t e l p u n k t e d e s u m ſ c h r i e b e n e n C i r k e l s a u f e i n e S e i t e g e l a ſ ſ e n, d i e H ä l f t e d e r E n t f e r n u n g d e s S c h e i t e l s d e s e n t g e g e n g e ſ e t z t e n W i n k e l s v o n d e m P u n k t e, w o ſ i c h d i e d r e y a u s d e n W i n k e l n a u f d i e g e g e n ü b e r ſ t e h e n d e n S e i t e n g e z o g e n e n P e r p e n d i k e l ſ c h n e i d e n.

Daraus folgt, daſs, wenn man aus p, dem Mittelpunkt von $\overline{BC}$ (*Fig.* 45), eine Linie nach A zöge,

ſie in o durch die Linie $\overline{LH}$ (H iſt der Durchſchnittspunkt der Perpendikel) auf zwey Drittel ihrer Länge, vom Punkte A an zu rechnen, geſchnitten würde. Denn die Dreyecke AHo, pLo ſind ähnlich, alſo da $\overline{Lp} = \frac{1}{2}\overline{AH}$, iſt auch $\overline{po} = \frac{1}{2}\overline{Ao}$. Nun ſieht man leicht, daſs o der Punkt iſt, wo ſich die drey Linien, die aus jedem Winkel auf die gegenüberſtehenden Seiten gezogen werden, ſchneiden. Alſo: In jedem Dreyecke liegt der Durchſchnittspunkt der drey Linien, aus jedem Winkel auf die Mitte der gegenüberſtehenden Seite, der Durchſchnittspunkt der drey Perpendikel aus eben dieſen Winkeln, auf die gegenüberſtehenden Seiten gezogen, und der Mittelpunkt des umſchriebenen Cirkels in einer geraden Linie.

132. Bis jetzt haben wir den Durchmeſſer des Cirkels (*Fig.* 43.) durch 1 bezeichnet, aber wollen wir die wirklichen Werthe der Figuren, die nach dieſem Parameter beſtimmt werden, haben, ſo muſs man damit anfangen, die Gleichungen gleichartig zu machen, indem man für die Einheit, wo ſie den Durchmeſſer vorſtellt, den wirklichen Werth dieſes Durchmeſſers ſetzt. Wir wollen den Radius $= R$ annehmen, ſo wird der Durchmeſſer $= 2R$ ſeyn. Dann muſs man, um die (122) gefundenen Gleichungen homogen zu machen, ſtatt der Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ u. ſ. w. $\frac{\overline{AB}}{2R}$ $\frac{\overline{AC}}{2R}$ $\frac{\overline{BD}}{2R}$ u. ſ. w. ſetzen, die ſo abſtrakte Zahlen werden, wie jeder der zweyten Ausdrücke dieſer Gleichungen. Dieſe ſo umge-

formten Formeln geben verschiedene neue Folgerungen. Z. B. wir haben (124) $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 1$,

diese Gleichung wird $\overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 = 4 R^2$.

Aus demselben Grunde hat man $\overline{AB}^2 + \overline{CD}^2 = 4 R^2$,

also $\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{BD}^2 + \overline{CD}^2 = 8 R^2$,

d. h. In jedem Viereck, das in einem Cirkel beschrieben ist und rechtwinklichte Diagonalen hat, ist die Summe der Quadrate der vier Seiten dem doppelten Quadrate des Durchmessers gleich.

133. Wir fanden ebenfalls (124)

$$\overline{AE}^2 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 1.$$

Diese Einheit giebt hier $4 R^2$, also:

In jedem Vierecke, das in einem Cirkel beschrieben ist und rechtwinklichte Diagonalen hat, ist die Summe der Quadrate der vier Segmente der Diagonalen gleich dem Quadrate des Diameters.

134. Weil $\overline{BC} = \overline{BE} + \overline{CE}$, so hat man

$$\overline{BC}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + 2 \overline{BE} . \overline{CE}$$

und eben so $\overline{AD}^2 = \overline{AE}^2 + \overline{DE}^2 + 2 \overline{AE} . \overline{DE}$.

Addirt man die beyden Gleichungen und bemerkt, dass nach dem vorigen Satz

$$\overline{AE}^4 + \overline{BE}^2 + \overline{CE}^2 + \overline{DE}^2 = 4 R^2$$

und $\overline{BE} . \overline{CE} = \overline{AE} . \overline{DE}$ wegen der Eigenschaften des Cirkels, so erhält man

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 4 R^2 + 4 \overline{AE} . \overline{DE}.$$

Diess festgesetzt, so wollen wir die Entfernung des Punktes E vom Mittelpunkte des Cirkels r nen-

nen, oder welches einerley ist, den Halbmesser des concentrischen Kreises, der durch den Punkt E geht. Die Segmente, welche E auf dem Durchmesser, der durch diesen Punkt geht, macht, werden $R+r$ und $R-r$ seyn, folglich ihr Produkt R^2-r^2. Also hat man vermöge der Eigenschaften des Cirkels

$$\overline{AE} \,.\, DE = R^2 - r^2.$$

Also wird die vorige Gleichung

$$\overline{BC}^2 + \overline{AD}^2 = 8R^2 - 4r^2,$$

d. h. Wenn man aus einem beliebigen Punkte in der Fläche des Cirkels zwey beliebige Sehnen zieht, die sich senkrecht durchschneiden, so wird die Summe der Quadrate dieser beyden Sehnen gleich dem doppelten Quadrate des Durchmessers seyn, weniger viermal des Quadrats der Entfernung des Durchschnittspunktes dieser beyden Sehnen vom Mittelpunkt des Cirkels.

Man muss bemerken (47), dass dieselben Eigenschaften statt haben, der Punkt E mag innerhalb oder ausserhalb der Fläche des Cirkels liegen. Dieselben Eigenschaften erstrecken sich auch auf die Kugel, mit folgenden Modifikationen.

135. Wir wollen annehmen, dass eine Kugel durch drey unter einander perpendikuläre Ebenen geschnitten sey, R sey ihr Halbmesser, r die Entfernung ihres Centrums von dem Punkte, wo sich die drey Axen kreuzen, welche aus den Durchschnitten dieser Ebenen entstehen, so ist

1) die Summe der Quadrate der 3 Sehnen oder der Theil der eben angeführten Axen, welcher von der Kugelfläche abgeschnitten wird, $= 12 R^2 - 8 r^2$.

2) Die Summe der Produkte, die entstehen, wenn man die 2 Segmente jeder Sehne mit einander multiplicirt, $= 3 R^2 - 3 r^2$.

3) Die Summe der Quadrate der 6 Segmente, die 2 und 2 auf diesen Sehnen gebildet werden, $= 6 R^2 - 2 r^2$.

4) Die Summe der Quadrate der 12 Linien, die 2 und 2 die Enden von jeder dieser Sehnen mit den Enden der beyden andern verbinden, $= 24 R^2 - 8 r^2$.

5) Die Summe der Quadrate der 15 Linien, die 2 und 2 die 6 Enden der 3 Sehnen verbinden, $= 36 R^2 - 16 r^2$.

6) Die Summe der Quadrate der Halbmesser der 3 Cirkel, welche die Durchschnitte der Kugel mit 3 Ebenen bilden, $= 3 R^2 - r^2$.

Jede dieser Quantitäten wird also immer dieselbe seyn, was auch die Richtung der Axen seyn mag, so lange der Halbmesser R der Kugel und die Entfernung r ihres Mittelpunkts vom Durchschnittspunkte dieser Axen dieselben bleiben, dieser Durchschnittspunkt mag innerhalb oder ausserhalb des Körpers der Kugel liegen, wenn sie nur wirklich durchschnitten, oder zum wenigsten von diesen drey Axen berührt ist, denn die Sätze haben nicht mehr statt, wenn eine oder zwey dieser Axen nicht die Kugel träfen.

Ich füge noch hinzu, weil die Flächen der Cirkel sich wie die Quadrate der Durchmesser verhalten, so folgt aus dem sechsten Satze dieser neue:

Wenn man von einem gegebenen Punkte sich drey auf einander senkrechte Ebenen vorstellt, die den Körper einer Kugel schneiden, so wird die Summe der Flächen der drey Cirkel, welche die Durchschnitte bilden, immer dieselbe seyn, welche Richtungen man auch diesen Ebenen giebt; wenn sie nur nicht aufhören alle drey die Kugel zu schneiden. Diese beständige Quantität ist $\frac{3}{4}$ der gegebenen sphärischen Oberfläche, weniger der ganzen sphärischen Oberfläche, welche zum Durchmesser die Entfernung des Centrums der gegebenen Kugel vom Durchschnittspunkte der drey Axen hätte.

136. Man kann aus diesen Sätzen verschiedene interessante Folgerungen ziehen. Z. B. wenn man annimmt, dafs der Punkt, wo sich die drey Axen schneiden, auf der Oberfläche der Kugel sey, so hat man $r = R$, und das System kommt auf eine Triangular-Pyramide zurück, deren drey Flächen auf einander senkrecht sind. Die dritte Formel sagt uns, dafs die Summe der Quadrate der drey Kanten, die von dem Scheitel ausgehen, wo sich die drey Flächen vereinigen, immer gleich dem Quadrate des Durchmessers der Kugel ist, wie auch die Richtungen dieser Kanten seyn mögen. Also eben so, als, wenn man aus einem Punkte der Peripherie eines Cirkels zwey auf einander senkrechte Sehnen zieht, die Summe

der Quadrate dieſer Sehnen immer gleich dem Quadrate des Durchmeſſers iſt, eben ſo iſt bey der Kugel, wenn man, von einem Punkte auf ihrer Oberfläche genommen, in dieſe Kugel drey beliebige Sehnen zieht, die Summe der Quadrate dieſer drey Sehnen immer gleich dem Quadrate des Durchmeſſers dieſer Kugel.

Daher folgt auch, daſs, wenn man eine Triangularpyramide, die drey auf einander ſenkrechte Seitenflächen hat, in eine Kugel beſchreiben ſollte, man gleich den Durchmeſſer der Kugel haben würde.

137. Aus dem Mittelpunkte L des umſchriebenen Kreiſes (*Fig.* 46.) ſeyen die Perpendikel $\overline{La}$, $\overline{Lb}$, $\overline{Lc}$ auf die Seiten $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ gelaſſen, und dann die Linien $\overline{ab}$, $\overline{ac}$, $\overline{bc}$ gezogen; da die Punkte a, b, c die Mittelpunkte der Seiten ſind, ſo werden die letztern Linien mit den jedesmaligen Seiten parallel ſeyn, und gleich ihren Hälften. Dieſs angenommen, kann das Viereck $aBcL$, welches zwey rechte Winkel in a und c hat, eben deswegen in einen Kreis beſchrieben werden. Alſo nach der Eigenſchaft der in einen Kreis beſchriebenen Vierecke iſt das Produkt ſeiner zwey Diagonalen gleich der Summe der Produkte der entgegengeſetzten Seiten. Die beyden andern Vierecke $bAcL$, $bCaL$ haben dieſelbe Eigenſchaft. Alſo hat man die drey Gleichungen

$$\overline{AL}\,.\,\overline{bc} = \overline{Ab}\,.\,\overline{cL} + \overline{Ac}\,.\,\overline{bL}$$
$$\overline{BL}\,.\,\overline{ca} = \overline{Bc}\,.\,\overline{aL} + \overline{Ba}\,.\,\overline{cL}$$
$$\overline{CL}\,.\,\overline{ab} = \overline{Ca}\,.\,\overline{bL} + \overline{Cb}\,.\,\overline{aL}.$$

Addirt man alle dieſe Gleichungen, indem man bemerkt, daſs $\overline{AL} = \overline{BL} = \overline{CL} = R$, und daſs

$\overline{bc} + \overline{ca} + \overline{ab}$ die Hälfte des Umfangs ist, den ich p nennen will, und daſs endlich $\overline{Ab} = \overline{Cb}$, $\overline{Ac} = \overline{Bc}$, $\overline{Ba} = \overline{Ca}$, so erhält man

$$\tfrac{1}{2}p \,.\, R = \tfrac{1}{2}p\,(\overline{aL} + \overline{bL} + \overline{cL})$$
$$- \tfrac{1}{2}(\overline{aL} \,.\, \overline{BC} + \overline{bL} \,.\, \overline{AC} + \overline{cL} \,.\, \overline{AB}),$$

aber der letzte Ausdruck des zweyten Gliedes ist offenbar der Inhalt des Dreyecks ABC; nimmt man nun den Durchmesser des im Dreyecke beschriebenen Kreises r, so ist dieser Inhalt auch $= \tfrac{1}{2}pr$; setzt man diesen letzten Werth für den ersten, versetzt, und dividirt alles durch $\tfrac{1}{2}p$, so erhält man

$$R + r = \overline{aL} + \overline{bL} + \overline{cL}.$$

Also in jedem Dreyecke ist die Summe der drey Perpendikel aus dem Mittelpunkte des umschriebenen Kreises auf die Seiten, gleich der Summe des Halbmessers des umschriebenen Kreises und des Halbmessers des eingeschriebenen Kreises.

Wir haben angenommen, daſs der Mittelpunkt in die Fläche des Dreyecks selbst fiele; fällt er auſserhalb, so ist ein stumpfer Winkel da, und dann wird der Perpendikel, aus dem Mittelpunkte auf die diesem stumpfen Winkel entgegengesetzte Seite gesenkt, invers, und so sein Werth negativ.

Wir haben (131) gesehen, daſs $\overline{AH}$ (*Fig.* 43.) das Doppelte des Perpendikels ist, das man aus dem Mittelpunkte L auf die dem Winkel A, aus welchem der Perpendikel $\overline{AH}$ gezogen ist, entgegengesetzte Seite zieht. Also ist die Summe der Entfernungen des Punktes H von den Winkeln A, B, C selbst das

Doppelte der Summe der drey Perpendikel, die aus dem Mittelpunkt auf die Seiten gezogen ſind. Nun haben wir oben geſehen, daſs dieſe letzte Summe $= R + r$ iſt, alſo:

In jedem ſpitzwinklichten Dreyecke iſt die Summe der Entfernungen des Punktes, wo ſich die drey Perpendikel aus den Winkeln auf die entgegengeſetzten Seiten ſchneiden, gleich der Summe des Durchmeſſers des eingeſchriebenen Kreiſes und des Durchmeſſers des umſchriebenen Kreiſes. Iſt einer von den Winkeln ſtumpf, ſo muſs man die Entfernung dieſes Winkels von dem Punkte, wo ſich die Perpendikel kreuzen, negativ nehmen.

Man hat offenbar (*Fig.* 46.) $\overline{La} = R \,.\, cos\, A$, $\overline{Lb} = R \,.\, cos\, B$, $\overline{Lc} = R \,.\, cos\, C$. Addirt man dieſe drey Gleichungen, und bemerkt, daſs $\overline{La} + \overline{Lb} + \overline{Lc} = R + r$, ſo erhält man

$$R + r = R \,.\, (cos\, A + cos\, B + cos\, C) \text{ oder}$$

$$\frac{r}{R} = cos\, A + cos\, B + cos\, C - 1, \text{ d. h.:}$$

In jedem Dreyeck verhält ſich der Halbmeſſer des eingeſchriebenen Kreiſes zum Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes, wie die Summe der Coſinus der drey Winkel, weniger den *Sinus totus*, zum *Sinus totus*.

138. Man könnte, indem man immer nur von den gegebenen Begriffen ausginge, die Theorie der

Lineo-

Lineo-angulär-Quantitäten auf einen allgemeineren Grundsatz zurückführen, der auf dem bekannten Satze beruht, daſs in jedem eingeſchriebenen Viereck das Produkt der beyden Diagonalen gleich der Summe der Produkte der entgegengeſetzten Seiten iſt.

Es ſey $ABCD$ (*Fig.* 47.) ein ſolches Viereck; wir wollen

$\widehat{AB} = 2a$, $\widehat{AC} = 2b$, $\widehat{DC} = 2c$ und folglich
$\widehat{BD} = 2(2\pi - [a + b + c])$ annehmen.

Wir haben alſo (121) $\overline{AB} = \sin a$, $\overline{AC} = \sin b$, $\overline{DC} = \sin c$, $\overline{BD} = \sin(a + b + c)$, $\overline{BC} = \sin(a+b)$, $\overline{AD} = \sin(b+c)$.

Setzt man dieſe Werthe in die Gleichung

$$\overline{BC} \,.\, \overline{AD} = \overline{AB} \,.\, \overline{DC} + \overline{AC} \,.\, \overline{BD},$$

ſo erhalten wir

$$\sin(a+b) \,.\, \sin(b+c) = \sin a \,.\, \sin c + \sin b \,.\, \sin(a+b+c),$$

eine Formel, die für jeden Werth der Winkel a, b, c iſt.

Wir wollen zum Beyſpiel $b + c = \pi$ nehmen, ſo hat man

$\sin(b + c) = 1$, $\sin c = \cos b$, $\sin(a + b + c)$
$= \sin(\pi + a) = \cos a$; die Formel wird alſo

$$\sin(a + b) = \sin a \,.\, \cos b + \sin b \,.\, \cos a.$$

Nehmen wir $b = \pi$, ſo haben wir

$\sin b = 1$, $\sin(a + b) = \cos a$, $\sin(b + c) = \cos c$,
$\sin(a + b + c) = \cos(a + c)$;

die Formel wird alſo

$$\cos(a + c) = \cos a \,.\, \cos c - \sin a \,.\, \sin c.$$

Nehmen wir $c = -a$, ſo haben wir

$\sin(a + b + c) = \sin b$, $\sin c = -\sin a$, $\sin(b + c)$
$= \sin(b - a)$;

die Formel wird alſo

$$\sin(b+a) \cdot \sin(b-a) = \sin b^2 - \sin a^2.$$

Nehmen wir $c = \pi - a$, ſo haben wir

$$\sin c = \cos a,\ \sin(b+c) = \cos(a-b),\ \sin(a+b+c) = \cos b;$$

die Formel wird alſo

$$\sin(a+b) \cdot \cos(a-b) = \sin a \cdot \cos a + \sin b \cdot \cos b.$$

So ſchlieſst dieſer einzige Satz die ganze Theorie der Lineo - angulär - Quantitäten zweyer gegebenen Winkel ein (ſiehe 210 ff.).

Achte Aufgabe.

139. Durch allgemeine Formeln die Verhältniſſe auszudrücken, die zwiſchen Sinus und Coſinus einer beliebigen Zahl von Winkeln, Sinus und Coſinus ihrer Summe, und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes beſtehen.

In der (122) behandelten Aufgabe haben wir nur zwey Winkel m, n betrachtet, und haben die Verhältniſſe geſucht, die zwiſchen Sinus und Coſinus dieſer Winkel, ſo wie zwiſchen Sinus und Coſinus ihrer Summe, und Sinus und Coſinus ihres Unterſchiedes beſtehen. Wir müſſen jetzt dieſe Formeln allgemein machen, indem wir ſie auf eine beliebige Folge von Winkeln a, b, c, d ausdehnen.

Wir wollen erſt nur drey nehmen, dann hat man folgende beyden wechſelſeitigen Gleichungen zwiſchen den drey Winkeln a, b, c, d. h. wo dieſe Winkel alle drey dieſelbe Rolle ſpielen,

$$\sin a \,.\, \sin(b-c) + \sin b \,.\, \sin(c-a) + \sin c \,.\, \sin(a-b) = 0 \quad (A)$$

$$\cos a \,.\, \sin(b-c) + \cos b \,.\, \sin(c-a) + \cos c \,.\, \sin(a-b) = 0 \quad (B).$$

Wir haben nämlich (123)

$$\left.\begin{array}{l} \sin(b-c) = \sin b \,.\, \cos c - \sin c \,.\, \cos b \\ \sin(c-a) = \sin c \,.\, \cos a - \sin a \,.\, \cos c \\ \sin(a-b) = \sin a \,.\, \cos b - \sin b \,.\, \cos a \end{array}\right\} (C)$$

Multiplicirt man die erſte Gleichung durch $\sin a$, die zweyte durch $\sin b$, die dritte durch $\sin c$, und addirt ſie dann, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte die Gleichung (A), welches die erſte von denen iſt, die bewieſen werden ſollten.

Multiplicirt man nachher die erſte von den Gleichungen (C) durch $\cos a$, die zweyte durch $\cos b$, die dritte durch $\cos c$, und addirt ſie, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte die Gleichung (B), welches der zweyte der zu beweiſenden iſt.

Dieſe letzte kann auch aus der erſten (A) abgeleitet werden, denn dieſe muſs ſtatt haben, welche Werthe man auch für a, b, c ſetzt, und wird alſo eben ſo wahr ſeyn, wenn man ſtatt dieſer Winkel ihre Complemente ſetzt, nämlich $\pi - a$, $\pi - b$, $\pi - c$; durch dieſe Subſtitution aber wird die Gleichung (A), die Gleichung (B).

In dieſen Formeln kann man willkührlich einen oder mehrere von den drey Winkeln a, b, c negativ annehmen, was die Summen der Winkel, zwey und zwey genommen, ſtatt ihrer Unterſchiede giebt.

Dividirt man die erſte der Formeln (A), (B) durch $\sin a.$ $\sin b.$ $\sin c.$ und die zweyte durch

$\cos a . \cos b . \cos c.$ so werden diese Formeln

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin a . \sin b} + \frac{\sin(b-c)}{\sin b . \sin c} + \frac{\sin(c-a)}{\sin c . \sin a} = 0 \quad (D)$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a . \cos b} + \frac{\sin(b-c)}{\cos b . \cos c} + \frac{\sin(c-a)}{\cos c . \cos a} = 0 \quad (E)$$

Formeln, die auch wechselseitig zwischen a, b, c sind.

Setzt man in den Formeln (A), (B) nach der Reihe $c = 0$, $c = \pi$, und setzt man auch nach einander b positiv und negativ, so wird man die Grundformeln erhalten, welche die fünfte und sechste Formel der Tafel (122) für zwey Winkel geben.

Nimmt man $c = a + b$, so werden die Formeln (A) und (B)

$$\sin(a+b) . \sin(a-b) = \sin a^2 - \sin b^2$$

$$\cos(a+b) . \sin(a-b) = \sin a . \cos a - \sin b . \cos b.$$

Setzt man in der Formel (A) $c = \pi$, $b = -a$, so wird sie $\sin 2a = 2 \sin a . \cos a$.

Es sey $c = \pi$, $b = \frac{1}{2} a$, so wird die Formel $\frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a}$ oder $\tang \frac{1}{2} a = \frac{\sin a}{1 + \cos a}$. Derselbe Fall tritt bey den andern ein.

140. Jetzt wollen wir vier Winkel, a, b, c, d, im System annehmen, dann wird man folgende beyde Formeln haben:

$$\sin a . \sin b . \sin(c-d) + \sin b . \sin c . \sin(d-a) + \sin c . \sin d . \sin(a-b) + \sin d . \sin a . \sin(b-c) = 0.$$

$$\cos a . \cos b . \sin(c-d) + \cos b . \cos c . \sin(d-a) + \cos c . \cos d . \sin(a-b) + \cos d . \cos a . \sin(b-c) = 0.$$

Dividirt man die erste durch $\sin a . \sin b . \sin c . \sin d$,

und die zweyte durch $\cos a . \cos b . \cos c . \cos d$, so erhält man

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin a . \sin b}+\frac{\sin(b-c)}{\sin b . \sin c}+\frac{\cos(c-d)}{\sin c . \sin d}+\frac{\sin(d-a)}{\sin d . \sin a}=0$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a . \cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b . \cos c}+\frac{\sin(c-d)}{\sin c . \sin d}+\frac{\sin(d-a)}{\sin d . \sin a}=0.$$

Betrachtet man die Analogie dieser Formeln mit denen (139) für drey Winkel nur gefundenen, so kann man schliessen, dass überhaupt für eine beliebige Zahl von Winkeln

$$\frac{\sin(a-b)}{\sin a . \sin b}+\frac{\sin(b-c)}{\sin b . \sin c}+\frac{\sin(c-d)}{\sin c . \sin d}\cdots+\frac{\sin(p-a)}{\sin p . \sin a}=0 \quad (F)$$

$$\frac{\sin(a-b)}{\cos a . \cos b}+\frac{\sin(b-c)}{\cos b . \cos c}+\frac{\sin(c-d)}{\cos c . \cos d}\cdots+\frac{\sin(p-a)}{\cos p . \cos a}=0 \quad (G).$$

In der That haben wir (123)

$$\sin(a-b)=\sin a . \cos b-\sin b . \cos a$$
$$\sin(b-c)=\sin b . \cos c-\sin c . \cos b$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\sin(p-a)=\sin p . \cos a-\sin a . \cos p.$$

Theilt man die erste dieser Gleichungen durch $\sin a$, $\sin b$, die zweyte durch $\sin b$, $\sin c$ u. s. w. und addirt dann alle diese Gleichungen, so wird das zweyte Glied 0, das erste die Gleichung in (F).

Die zweyte Gleichung (G) beweist man auch auf gedoppelte Art (139).

In diesen Formeln kann man willkührlich einen oder mehrere Winkel negativ annehmen, wodurch in

der Rechnung die Summen dieser Winkel, zwey und zwey genommen, statt ihrer Unterschiede entstehen werden.

Dieselben Formeln können auf unendlich viele Arten verändert werden, denn sie müssen statt haben, welche Winkel man auch für a, b, c setzen will. So kann man statt des Systems der Winkel a, b, c, das System der Winkel $(a+b)$, $(b+c)$, $(c+d)$ u. s. w. setzen, oder $(a-b)$, $(b-c)$, $(c-d)$ u. s. w. oder $(a+b+c)$, $(b+c+d)$ u. s. w., oder $(a+b-c)$, $(b+c-d)$ u. s. w. oder die Complemente dieser Winkel, oder diese Winkel negativ genommen u. s. w.

141. Dieselbe Methode kann dienen, um mehr andere Formeln derselben Art zu finden, die eben so einfach und wechselseitig zwischen allen Winkeln sind. Man hat z. B. zwischen beliebigen Winkeln a, b, c p folgende zwey allgemeine Formeln:

$$\sin(a+b)\,.\,\sin(a-b) + \sin(b+c)\,.\,\sin(b-c) \ldots\ldots + \sin(p+a)\,.\,\sin(p-a) = 0 \quad (H)$$

$$\cos(a+b)\,.\,\sin(a-b) + \cos(b+c)\,.\,\sin(b-c) \ldots\ldots + \cos(p+a)\,.\,\sin(p-a) = 0 \quad (K)$$

Denn wir haben vorher (123, 138) gefunden

$$\sin(a+b)\,.\,\sin(a-b) = \sin a^2 - \sin b^2$$
$$\sin(b+c)\,.\,\sin(b-c) = \sin b^2 - \sin c^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\sin(p+a)\,.\,\sin(p-a) = \sin p^2 - \sin a^2.$$

Addirt man alle diese Gleichungen, so wird das zweyte Glied 0, und das erste die Formel (H), welches die erste zu beweisende ist.

Eben ſo fanden wir (123)

$$\cos(a+b)\,.\,\sin(a-b) = \sin a\,.\,\cos a - \sin b\,.\,\cos b$$

$$\cos(b+c)\,.\,\sin(b-c) = \sin b\,.\,\cos b - \sin c\,.\,\cos c$$

. .

$$\cos(p+a)\,.\,\sin(p-a) = \sin p\,.\,\cos p - \sin a\,.\,\cos a$$

Addirt man dieſe Gleichungen, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte die Formel (*K*), welches die zweyte der zu beweiſenden iſt.

142. Eben ſo geben die vierten Formeln der Tafel (123)

$$\frac{\sin(a+b)\,.\,\sin(a-b)}{\cos a^2\,.\,\cos b^2} = \tan a^2 - \tan b^2$$

$$\frac{\sin(b+c)\,.\,\sin(b-c)}{\cos b^2\,.\,\cos c^2} = \tan b^2 - \tan c^2$$

.

$$\frac{\sin(p+a)\,.\,\sin(p-a)}{\cos p^2\,.\,\cos a^2} = \tan p^2 - \tan a^2$$

Addirt man dieſe Gleichungen, ſo wird das zweyte Glied o, und das erſte giebt die Formel

$$\frac{\sin(a+b)\,.\,\sin(a-b)}{\cos a^2\,.\,\cos b^2} + \frac{\sin(b+c)\,.\,\sin(b-c)}{\cos b^2\,.\,\cos c^2} \ldots\ldots + \frac{\sin(p+a)\,.\,\sin(p-a)}{\cos p^2\,.\,\cos a^2} = 0$$

143. Eben ſo geben die erſten Formeln der Tafel (123)

$$\tan(a-b) = \frac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a\,.\,\tan b}, \text{ oder}$$

$$\tan(a-b)\,(1+\tan a\,.\,\tan b) = \tan a - \tan b$$

$$\tan(b-c)\,(1+\tan b\,.\,\tan c) = \tan b - \tan c$$

. .

$$\tan(p-a)\,(1+\tan b\,.\,\tan c) = \tan p - \tan a.$$

Addirt man diese Gleichungen, so wird das zweyte Glied o, und das erste giebt folgende Formel:

$$\tang(a-b)(1+\tang a \cdot \tang b)+\tang(b-c)(1+\tang b \cdot \tang c)+\ldots\ldots+\tang(p-a)(1+\tang p \cdot \tang a)=0.$$

Es ist leicht einzusehen, dass man auf diese Art eine unendliche Menge Formeln derselben Gattung finden kann.

144. Nimmt man an, dass die Winkel $a, b, c \ldots$ eine regelmässige Reihe bilden, deren Gesetz bekannt sey, so bildet jede der eben angeführten Formeln auch eine regelmässige Reihe, wovon die Summe der Glieder schon gefunden ist, da sie $=0$ ist. Ich nehme zum Beyspiel an, dass $a, b, c \ldots$ in arithmetischer wachsender Reihe seyen, deren erstes Glied und Verhältniss $=\alpha$, deren Zahl der Glieder $=m$, so hat man

$$a=\alpha,\ b=2\alpha,\ c=3\alpha,\ d=4\alpha,\ \ldots\ p=m\alpha.$$

Also werden die beyden Formeln (H), (K), wenn man alles durch $-\sin \alpha$ dividirt,

$$\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha\ldots+\frac{\sin(m+1)\alpha \cdot \sin(m-1)\alpha}{-\sin \alpha}=0$$

oder

$$\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha\ldots+\sin(2m-1)\alpha=\frac{\sin(m+1)\alpha \cdot \sin(m-1)\alpha}{\sin \alpha}$$

$$\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha\ldots+\cos(2m-1)\alpha=\frac{\cos(m+1)\alpha \cdot \sin(m-1)\alpha}{\sin \alpha}$$

welches bekannte Formeln sind.

Setzt man diese Werthe in die (140) gefundenen Formeln (*F*), (*G*), und theilt man alles durch $-\sin a$, so werden sie

$$\frac{1}{\sin a \,.\, \sin 2a} + \frac{1}{\sin 2a \,.\, \sin 3a} \ldots \text{ u. s. w.}$$

$$= \frac{\sin (m-1) a}{\sin a^2 \,.\, \sin m a}$$

$$\frac{1}{\cos a \,.\, \cos 2a} + \frac{1}{\cos 2a \,.\, \cos 3a} \ldots,$$

$$= \frac{\sin (m-1) a}{\sin a \,.\, \cos a \,.\, \cos m a},$$

wo, weil $\operatorname{cosec} a = \frac{1}{\sin a}$, und $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, man folgende Formeln erhält:

$$\operatorname{cosec} a \,.\, \operatorname{cosec} 2a + \operatorname{cosec} 2a \,.\, \operatorname{cosec} 3a \ldots\ldots =$$

$$= \sin (m-1) a \,.\, \operatorname{cosec} a^2 \,.\, \operatorname{cosec} m a$$

$$\sec a \,.\, \sec 2a + \sec 2a \,.\, \sec 3a \ldots\ldots + =$$

$$= \sin (m-1) a \,.\, \sec a \,.\, \operatorname{cosec} a \,.\, \sec m a.$$

Dritter Abſchnitt.

Bildung analytiſcher Tafeln, um ſowohl den Inbegriff der Verhältniſſe auszudrücken, die zwiſchen den verſchiedenen Theilen derſelben Figur beſtehen; als auch die Modifikationen, welche die andern correlativen Figuren von dieſer erſten Figur und von einander unterſcheiden.

145. Ich werde hier bey verſchiedenen geometriſchen Figuren die Vergleichungstafeln anbringen, von denen ich im Anfange dieſes Werks eine Idee (2) gegeben habe; d. h. ich werde auf mehrere Beyſpiele die in den zwey erſten Abſchnitten entwickelten Grundſätze anwenden. Dabey verfahre ich ſo: Anfangs bilde ich die Tafel derjenigen Verhältniſſe, welche alle Theile des Syſtems, das ich als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen habe, unter einander binden, und nachher unterſuche ich die Veränderungen, welche der Ausdruck dieſer Verhältniſſe leiden muſs, wenn das Urſyſtem ſelbſt in verſchiedene Zuſtände der Umformung übergeht. Auch wird die Form dieſer Tafeln ſo eingerichtet werden, daſs dieſe Ver-

hältniſſe ſelbſt in ihrem Inbegriff betrachtet werden können, ſo daſs alle theilweiſen Verhältniſſe *implicite* darin begriffen ſind, und man jedes daraus herleiten kann, das zwiſchen beliebigen Quantitäten beſteht, die man aus dem Syſteme wählt, mögen dieſe Quantitäten lineär oder angulär ſeyn.

Die Zahl dieſer Verhältniſſe nimmt in dem Maaſse zu, in dem das Syſtem aus mehreren Theilen beſteht. Z. B. in einem Dreyeck ſind nur 6 Dinge zu betrachten, und in einem einfachen Vierecke, deſſen Seiten bis zu ihrem jedesmaligen Zuſammenſtoſsen verlängert ſind, ſchon 33; nämlich die 4 Seiten, die 2 Diagonalen, die 12 Abſchnitte, 2 und 2 auf jeder dieſer Seiten, oder Diagonalen gebildet, und endlich die 15 Winkel, die von dieſen 6 Linien, 2 und 2 betrachtet, eingeſchloſſen werden.

Aber die Zahl der beſondern Fragen, die bey jeder dieſer Figuren vorkommen, nimmt weit ſchneller zu, als die Zahl der Theile dieſer Figur ſelbſt. Da für das Dreyeck die allgemeine Frage dieſe iſt, wenn 3 von den 6 darin zu betrachtenden Dingen gegeben ſind (nur nicht die 3 Winkel), die andern 3 zu finden, ſo entſpringen daraus $\frac{6.\,5.\,4.\,3}{2.\,3} = 60$ beſondere Fragen, weniger den drey vorher ausgenommenen Fällen, wenn 3 Winkel gegeben ſind und 3 Seiten verlangt werden. Bey dem Viereck iſt die allgemeine Frage, wenn von den 33 darin zu betrachtenden Sachen irgend 5 gegeben ſind, die nicht von einander abhängen, die 28 Unbekannten zu finden.

Daraus entſpringen $\frac{33 \cdot 32 \cdot 31 \cdot 30 \cdot 29 \cdot 28}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 6645408$ beſondere Fragen bis auf die kleine Zahl der vorhin ausgenommenen Fälle. Man kann daraus auf die Zahl der beſonderen Fragen ſchlieſsen, die ein Fünfeck oder höhere Polygone geben würden, und ſo ſehen, daſs es beynahe unmöglich iſt, Tafeln zu bilden, die unmittelbar jeder dieſer beſondern Fragen entſprächen. Es muſs alſo dieſem Mangel durch eine beſondere Form abgeholfen werden, aus der man, vermöge einiger algebraiſchen Operationen, jede Antwort ziehen kann, deren man in einem beſondern Fall bedarf. Und das iſt gerade meine Abſicht.

Dazu ſtelle ich mir vor, daſs in der vorgegebenen Figur eine Kette von Dreyecken beſtimmt iſt; dann der graphiſchen Conſtruktion folgend, indem man nach den gewöhnlichen Regeln der Trigonometrie von einem zum andern übergeht, berechnet man alle Lineär- und Angulärtheile, aus denen das Ganze beſteht. Noch mehr, man drückt ſie alle bloſs in Werthen von einigen unter ihnen aus, die man wie bekannt anſieht, und die in hinlänglicher Zahl da ſeyn müſſen, damit alle übrigen beſtimmt ſeyn können. Die Tafel, die hieraus entſteht, hat offenbar nur ſo viel Formeln, als Quantitäten im Syſtem ſind, und nun behaupte ich, daſs dieſe Tafel den Mangel der vorhin angeführten allgemeinen Tafel vertritt, deren Ausführung offenbar nicht möglich iſt.

In der That, da die neue Tafel nach der Hypotheſe alle Theile des Syſtems enthalten muſs, bloſs in Werthen von einigen unter ihnen berechnet, ſo hat

man augenſcheinlich die Verhältniſſe dieſer Quantitäten auf irgend eine Art, zwey und zwey, drey und drey, zuſammengeſtellt u. ſ. w. bloſs in Werthen von denſelben erſten Quantitäten, die als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen ſind. Man kann alſo, wenn man dieſe letzten herausſchafft, bloſs durch dieſe Grundtafel alle möglichen Verhältniſſe haben, die zwiſchen den Quantitäten des allgemeinen Syſtems beſtehen. Die folgenden Unterſuchungen ſollen dieſe Ideen entwickeln, und die Anwendung jedes Reſultats auf die correlativen Syſteme machen, welche auf die Urfigur bezogen werden können, auf welche die Betrachtungen gegründet und die Tafeln gebildet ſind.

Neunte Aufgabe.

146. Ein Dreyeck iſt gegeben, und ein Perpendikel aus jedem der Winkel auf die gegenüberſtehende Seite geſenkt, man verlangt, daſs alle ſowohl anguläre, als lineäre Theile dieſer Figur, in Werthen von drey beliebigen unter ihnen ausgedrückt werden, die unabhängig von einander ſind, und die man als Maaſsſtab zur Vergleichung angenommen hat.

ABC (*Fig.* 28.) ſey das gegebene Dreyeck, $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, *CF* die Perpendikel, *D* ihr Durchſchnittspunkt. Man ſoll alſo alle Winkel und alle Linien, die zur Zuſammenſetzung dieſer Figur gehören, bloſs in Werthen von drey unter ihnen ausdrücken, weil durch drey alle übrigen ſchon genug beſtimmt ſind, wenn

nur diese drey von einander unabhängig sind. Also können diese drey Quantitäten weder drey Winkel seyn, weil zwey von ihnen den dritten bestimmen, noch eine der Linien des Systems mit den beyden auf ihr gebildeten Abschnitten, weil, wenn zwey von diesen lineären Quantitäten gegeben sind, die dritte, die nothwendig ihre Summe oder ihr Unterschied ist, auch bestimmt wäre.

Offenbar ist die allgemeine Aufgabe der Trigonometrie als ein besonderer Fall in dieser Frage enthalten, wie schon (128) gesagt ist, denn die sechs in dem Dreyecke *ABC* zu betrachtenden Dinge sind unter denen, die zur Bildung der Tafel gehören. Aber damit diese Tafel einer gröſsern Anzahl besonderer Fragen entsprechen könne, nehme ich auch die drey Linien $\overline{FG}$, $\overline{FH}$, $\overline{GH}$ darin auf, so wie den Halbmesser des umschriebenen und des eingeschriebenen Kreises, den Umfang und den Flächeninhalt desselben Dreyecks.

Ich nehme, so wie in der siebenten Aufgabe (122), als Maaſsstab zur Vergleichung die beyden Winkel $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, die ich m, n nenne, und den Halbmesser des umschriebenen Kreises $= R$. Also muſs ich, wie das offenbar möglich ist, alle Quantitäten des allgemeinen Systems in Werthen von m, n, R ausdrücken.

Den rechten Winkel werde ich durch π, den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises durch r, den Umfang durch P, und den Flächeninhalt $\overline{\overline{ABC}}$ des gegebenen Dreyecks durch S bezeichnen. Eben diese

Benennungen werde ich für die sechs folgenden Aufgaben beybehalten.

Allgemeine Tafel der Verhältnisse, die zwischen den Winkeln und den Seiten eines Dreyecks bestehen, den aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten gesenkten Perpendikeln, den Abschnitten und den daraus entstehenden Winkeln u. s. w. (*Fig.* 28.).

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = m$.
2) $C\hat{A}D = n$.
3) $B\hat{A}C = m + n$.
4) $C\hat{B}D = n$.
5) $A\hat{B}D = \pi - (m + n)$.
6) $A\hat{B}C = \pi - m$.
7) $B\hat{C}D = m$.
8) $A\hat{C}D = \pi - (m + n)$.
9) $A\hat{C}B = \pi - n$.
10) $A\hat{D}B = \pi + n$.
11) $A\hat{D}C = \pi + m$.
12) $B\hat{D}C = 2\pi - (m + n)$.

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = 2R . \sin (m + n)$.
14) $\overline{AC} = 2R . \cos m$.
15) $\overline{AB} = 2R . \cos n$.
16) $\overline{AD} = 2R . \cos (m + n)$.
17) $\overline{BD} = 2R . \sin m$.

18) $\overline{CD} = 2R \cdot \sin n.$

19) $\overline{AH} = 2R \cdot \cos m \cdot \cos n.$

20) $\overline{BH} = 2R \cdot \sin m \cdot \cos n.$

21) $\overline{CH} = 2R \cdot \sin n \cdot \cos m.$

22) $\overline{DH} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin n.$

23) $\overline{AF} = 2R \cdot \cos m \cdot \cos (m + n).$

24) $\overline{BF} = 2R \cdot \sin m \cdot \sin (m + n).$

25) $\overline{CF} = 2R \cdot \cos m \cdot \sin (m + n).$

26) $\overline{DF} = 2R \cdot \sin m \cdot \cos (m + n).$

27) $\overline{AG} = 2R \cdot \cos n \cdot \cos (m + n).$

28) $\overline{BG} = 2R \cdot \cos n \cdot \sin (m + n).$

29) $\overline{CG} = 2R \cdot \sin n \cdot \sin (m + n).$

30) $\overline{DG} = 2R \cdot \sin n \cdot \cos (m + n).$

31) $\overline{FG} = 2R \cdot \sin (m + n) \cdot \cos (m + n).$

32) $\overline{FH} = 2R \cdot \sin m \cdot \cos m.$

33) $\overline{GH} = 2R \cdot \sin n \cdot \cos n.$

34) $R = R.$

35) $P = 2R \cdot (\cos m + \cos n + \sin (m + n)).$

36) $r = R (\sin m + \sin n + \cos (m + n) - 1).$

37) $S = 2R^2 \cdot \cos m \cdot \cos n \cdot \sin (m + n).$

Die Bildung dieſer Tafel folgt offenbar aus der (122) gegebenen. Doch kann ſie auch leicht unmittelbar gebildet werden, denn alle Winkel findet man durch bloſse Addition oder Subtraktion, weil alle drey Winkel eines Dreyecks $= 2\pi$. Nachher erhält man alle Linien aus dem Satze, daſs ſich die Seiten eines Dreyecks wie die Sinus der gegenüberſtehenden Winkel verhalten. Nun weiſs man ſchon (122), daſs $\overline{AB} = 2R \cdot \cos n$, $\overline{AC} = 2R \cdot \cos m$, $\overline{BC} = 2R \cdot \sin (m + n)$.

Der

Der Werth von P findet ſich, indem man die vorigen Werthe der drey Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ addirt.

Der Werth von r entſpringt offenbar aus dem (137) bewieſenen Satze, wenn man in die Gleichung $2R + 2r = \overline{AD} + \overline{BC} + \overline{CD}$, die Werthe ſetzt, welche für dieſe drey Linien die 16te, 17te, 18te Formel der Tafel geben, und daraus den Werth von r zieht.

Den Flächeninhalt S findet man durch den bekannten Grundſatz, daſs der Flächeninhalt jedes Dreyecks gleich dem Produkte zweyer Seiten iſt, durch den halben Sinus des eingeſchloſſenen Winkels multiplicirt. Das giebt

$$S = \tfrac{1}{2}\overline{AB} \,.\, \overline{AC} \,.\, \sin\,(m + n),$$

wo man für $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ die Werthe der 15ten und 14ten Formel ſetzen muſs.

Man kann eben ſo den Flächeninhalt der andern Dreyecke finden, die zur Zuſammenſetzung der unterſuchten Figur gehören, wie

$\overline{ADB}$, $\overline{ADF}$, $\overline{BCG}$ u. ſ. w.

Die zweyten Ausdrücke dieſer Formeln werden nach Bedürfniſs, vermöge derer umgeformt, welche die (123) gebildete Tafel ausmachen, um die Verhältniſſe der Lineo-angulär-Quantitäten im Allgemeinen auszudrücken.

147. Dieſe Tafel bezieht ſich nur auf (*Fig.* 28.), die als Urſyſtem angenommen iſt, wo das gegebene Dreyeck ABC ſeine drey ſpitzen Winkel hat. Wir müſſen jetzt unterſuchen, welche Modifikationen ſie leiden muſs, wenn man ſie auf den Fall anwenden

will, wenn einer von den Winkeln ſtumpf wäre. Dazu kann man auf zwey Arten kommen; entweder indem man die Rechnung ganz von vorne für die neue Figur anfängt, oder indem man unterſucht, welche Quantitäten bey dem Uebergange der einen in die andere invers werden und darin in den Formeln der Tafel das Zeichen einer jeden von ihnen verändert.

Wir wollen zuerſt annehmen, daſs der Winkel *BAC* (*Fig.* 31.) ſtumpf werde; das kann nun geſchehen, wenn *A* und *D* ihre Stellungen verwechſeln. Dann iſt keine von den Quantitäten m, n, R, aus denen bloſs die letzten Glieder beſtehen, weder durch 0, noch durch ∞ gegangen: alſo bleibt jedes von dieſen letzten Gliedern ſo wie es iſt, ohne Veränderung der Zeichen. Jetzt wollen wir unterſuchen, was aus den erſten Gliedern wird.

Wenn nach der Hypotheſe $B\hat{A}C$ ſtumpf wird, oder $m + n > \pi$, ſo folgt aus der 5ten und 8ten Formel, daſs $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$ invers werden, und daſs folglich ihr Zeichen der Correlation — ſeyn muſs.

Noch mehr: der Coſinus eines ſtumpfen Winkels iſt invers (116), alſo vermöge der Formeln 16, 23, 26, 27, 30, 31 werden die Linien $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$ auch invers, und müſſen das Zeichen — annehmen: folglich wenn die Verhältniſſe der 37 Quantitäten, welche die erſten Glieder dieſer Formeln ſind, durch beliebige Gleichungen ausgedrückt wären; ſo brauchte man nur, um dieſe Gleichungen auf den Fall anwendbar zu machen, wo $B\hat{A}C$ ſtumpf wäre, in der erſten Tafel die Zeichen der acht Quan-

titäten $\widehat{ABD}$, $\widehat{ACD}$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$ zu ändern.

Das ſtimmt mit dem Reſultat überein, das die zweyte Horizontallinie der Tafel der Correlation (98) giebt; denn man ſieht eben ſo durch dieſe Tafel, daſs die Quantitäten, die invers ſind, und deren Zeichen man folglich verändern muſs, wie vorher $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\widehat{ABD}$, $\widehat{ACD}$ ſind; nur $\overline{FG}$ findet ſich nicht da, weil ſie nicht im Syſtem enthalten war, nach dem die Tafel der Correlation gebildet iſt.

Jetzt wollen wir annehmen, daſs $\widehat{ABC}$ ſtumpf werde (*Fig.* 32.); was geſchehen kann, wenn man ſich vorſtellt, daſs der Punkt B ſich auf BC bis jenſeits des Punktes H bewege; hier wird offenbar unter den drey Quantitäten m, n, R, welche die zweyten Glieder der Formeln ausmachen, m allein invers. Alſo ſetzt man $-m$ für m. Nun zu den erſten.

Weil m invers wird, oder ſein Werth das negative Zeichen annimmt, ſo ſieht man aus der erſten und ſiebenten Formel, daſs $\widehat{BAD}$ und $\widehat{BCD}$ invers werden.

Noch mehr (116): *ſin m* wird auch eine inverſe Quantität, alſo nach den Formeln 17, 20, 22, 24, 26, 32 müſſen die Quantitäten $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$ invers werden, und zum Zeichen der Correlation — erhalten. Wenn alſo die Verhältniſſe, welche unter den 37 Quantitäten beſtehen, welche die erſten Glieder dieſer Formeln ausmachen, durch beliebige Gleichungen ausgedrückt wären, ſo brauchte man nur, um dieſe Gleichungen auf die neue Hypotheſe

anwendbar zu machen (wenn $\hat{ABC} > \pi$), die Zeichen der acht folgenden Quantitäten darin zu verändern: $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$; was auch mit der dritten Horizontalreihe der (98) aufgestellten Tafel der Correlation übereinstimmt.

Aus demselben Grunde sieht man, daſs, wenn die Verhältniſſe unter eben den 37 Quantitäten durch Gleichungen ausgedrückt sind, man, um dieſe Gleichungen auf den Fall anwendbar zu machen, wo der Winkel $A\hat{C}B$ (*Fig.* 33.) stumpf würde, nur darin die Zeichen folgender acht Quantitäten zu verändern brauchte: $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{HG}$. Auch dieſs stimmt mit der vierten Zeile der (98) aufgestellten Tafel der Correlation überein.

148. Daraus können wir ſchlieſsen,

1) daſs die Formeln der Tafel unmittelbar auf das Dreyeck ABC angewendet werden, wenn die drey Winkel ſpitz ſind (*Fig.* 28.).

2) Um ſie ſo zu machen, wie man ſie gefunden haben würde, wenn die Rechnung auf die Hypotheſe gegründet wäre, daſs $B\hat{A}C > \pi$, braucht man nur in den erſten Gliedern die Zeichen der acht Quantitäten, $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, und nichts in den andern Gliedern zu verändern.

3) Um dieſelbe Tafel ſo zu machen, wie man ſie gefunden haben würde, wenn man die Rechnung auf die Hypotheſe gegründet hätte, daſs $A\hat{B}C > \pi$, muſs man in den zweyten Gliedern die Formeln $-m$ für m ſetzen, und in den erſten

die Zeichen der acht Quantitäten, $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$, verändern.

4) Hätte man endlich die Rechnung auf die Hypothese gegründet, daſs $A\hat{C}B > \pi$, und will die Tafel ſo machen, wie man ſie dann gefunden haben würde, ſo muſs man in den zweyten Gliedern die Formeln $-n$ für n ſetzen, und in den erſten die Zeichen der acht Quantitäten $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{HG}$, verändern.

Jetzt wollen wir einige beſondere Folgen aus dieſer allgemeinen Tafel ziehen.

149. Vergleiche ich $\overline{FG}$ mit $\overline{AD}$, ſo finde ich, daſs

$$\frac{\overline{FG}}{\overline{AD}} = \sin\,(m + n) \text{ oder}$$

$$\overline{FG} : \overline{AD} = \sin\,(m + n) : 1,$$

d. h. in einem Vierecke, das, wie $AFDG$, zwey rechte Winkel hat, die ſich diagonal entgegengeſetzt ſind, verhält ſich dieſe Diagonale $\overline{FG}$ zur andern Diagonale $\overline{AD}$, wie der Sinus irgend eines der Winkel, die durch dieſe letzte Diagonale verbunden ſind, zum *ſin. totus.* Eben das ſieht man bey den Vierecken derſelben Gattung $BFDH$, $CGDH$ und $AFCH$, das aus zwey Dreyecken beſteht, die ſich am Scheitel entgegengeſetzt ſind, AFD, CDH, und das zwey rechte Winkel $A\hat{F}C$, $A\hat{H}C$ hat; denn ſeine beyden Diagonalen ſind $\overline{FH}$, $\overline{AC}$, nun hat man aus der Tafel

$$\frac{\overline{FH}}{\overline{AC}} = \sin m, \text{ oder}$$

$$\overline{FH} : \overline{AC} = \sin m : 1.$$

Eben ſo bey den andern.

150. Vergleicht man $\overline{BD}$ mit $\overline{CD}$, so findet man

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \sin m : \sin n,$$

oder weil m das Complement von $A\hat{B}C$, und n das Complement von $A\hat{C}B$ ist, so hat man

$$\overline{BD} : \overline{CD} = \cos ABC : \cos ACB,$$

d. h. wie sich die Seiten eines Dreyecks zu den Sinus der gegenüberstehenden Winkel verhalten, eben so verhalten sich die Cosinus eben dieser Winkel zu den Entfernungen ihrer Scheitelpunkte, von dem Punkte, wo sich die drey Perpendikel schneiden, die aus diesen Scheitelpunkten auf die gegenüberstehenden Seiten gezogen werden.

151. Theilt man $\overline{AF}$ durch $\overline{AG}$, so erhält man $\frac{\cos m}{\cos n}$, eben so $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\cos m}{\cos n}$, also $\frac{\overline{AF}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$ oder

$$\overline{AF} : \overline{AG} = \overline{AC} : \overline{AB}.$$

Also haben die Dreyecke AGF, ABC einen gemeinschaftlichen Winkel zwischen proportionalen Seiten, also sind sie ähnlich, obgleich $\overline{FG}$ nicht mit $\overline{BC}$ parallel ist, aber sie sind das, was man antiparallel nennt, weil die gleichnamigen Seiten nach entgegengesetzten Richtungen liegen. Man könnte eben so beweisen, dass die andern Dreyecke BFH, CGH, auch jedes dem vorgenommenen Dreyecke ABC ähnlich, und also auch unter einander ähnlich sind.

152. Beschreibt man über $\overline{BC}$ als Durchmesser einen Kreis, so geht der Umkreis durch die Punkte F, G, wegen der rechten Winkel $B\hat{F}C$, $B\hat{G}C$, also wird $BFGC$ ein eingeschriebenes Viereck seyn, und

folglich die bekannten Eigenschaften dieser Figur haben. So wird es auch mit $AGHB$, $AFHC$, $BFDH$ u. s. w. seyn, und die Formeln werden dieselben Resultate geben.

153. Multiplicire ich von der einen Seite $\overline{AH}$ mit $\overline{DH}$, so erhalte ich *sin m . sin n . cos m . cos n*, und multiplicire ich von der andern Seite $\overline{BH}$ mit $\overline{CH}$, so habe ich dasselbe Resultat. Also $\overline{AH} \cdot \overline{DH} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$. Eben so findet man $\overline{BG} \cdot \overline{DG} = \overline{AG} \cdot \overline{CG}$ und $\overline{CF} \cdot \overline{DF} = \overline{AF} \cdot \overline{BF}$.

154. Erhebe ich die 13te und 16te Formel zum Quadrate und addire sie, so erhalte ich $4 R^2$, welches das Quadrat des Durchmessers des umschriebenen Cirkels ist. Eben das findet statt, wenn ich die 14te und 17te, oder 15te und 18te quadrire und sie addire, d. h. zwischen den vier Punkten A, B, C, D ist die Summe der Quadrate der geraden Linie, die zwey davon mit einander verbindet, und derjenigen, welche die beyden andern zusammenfügt, immer dieselbe und dem Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Cirkels gleich.

155. Addire ich die im vorigen Abschnitt vorkommenden sechs Quadrate, nämlich $\overline{AB}^2$, $\overline{AC}^2$, $\overline{BC}^2$, $\overline{AD}^2$, $\overline{BD}^2$, $\overline{CD}^2$, so ist die Summe $= 12 R^2$, d. h. die Summe der Quadrate der Entfernungen der vier Punkte A, B, C, D, zwey und zwey genommen, ist dem dreyfachen Quadrate des Durchmessers des umschriebenen Cirkels gleich.

156. Multiplicirt man von einer Seite die 14te und 15te Formel, und von der andern die 19te durch $2 R$, so erhält man dasselbe Produkt; also $\overline{AC} \cdot \overline{AB}$

$= \overline{AH} \cdot \overline{2R}$ oder $\overline{AH} : \overline{AB} = \overline{AC} : \overline{2R}$, d. h. in jedem Dreyecke verhält ſich der aus einem Winkel auf die entgegengeſetzte Seite geſenkte Perpendikel zu irgend einer von den dieſen Winkel einſchlieſsenden Seiten, wie die andere zum Durchmeſſer des umſchriebenen Cirkels, wie bekannt iſt.

157. Multiplicirt man die 15te und 18te Formel mit einander, und die 33ſte mit 2 R, ſo erhält man gleiche Reſultate. Alſo $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{GH} \cdot \overline{2R}$.

158. Multiplicirt man die 20ſte, 23ſte und 29ſte Formel, und eben ſo die 21ſte, 24ſte und 27ſte, ſo erhält man daſſelbe Reſultat. Alſo

$$\overline{AF} \cdot \overline{BH} \cdot \overline{CG} = \overline{AG} \cdot \overline{BF} \cdot \overline{CH}.$$

159. Multiplicirt man von einer Seite die 14te, 26ſte und 28ſte Formel, und von der andern die 17te, 25ſte und 27ſte, ſo erhält man daſſelbe Reſultat. Alſo

$$\overline{AC} \cdot \overline{BG} \cdot \overline{DF} = \overline{AG} \cdot \overline{BD} \cdot \overline{CF}.$$

Alle dieſe Zuſammenſtellungen, die man ins Unendliche fortſetzen kann, geben, wie man ſieht, eine Menge Lehrſätze, die man ſehr mühſam einzeln aufſuchen würde. Da nun die Tafel alle Quantitäten des Syſtems enthält, ſo ſchlieſst ſie auch *implicite* alle ihre Eigenſchaften in ſich. So kann man beſonders jedes Verhältniſs daraus ziehen, deſſen man bedarf, wie man an den andern Tafeln ſehen wird, die wir aus dieſer erſten in den folgenden Aufgaben ziehen werden.

Zehnte Aufgabe.

160. W e n n i n e i n e m D r e y e c k e z w e y W i n k e l, u n d d i e e i n e m e n t g e g e n g e ſ e t z t e

Seite gegeben ſind, zu finden: 1) den dritten Winkel und die beyden andern Seiten; 2) die aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten geſenkten Perpendikel; 3) die Segmente und Winkel, die aus den wechſelſeitigen Durchſchnitten aller dieſer Linien entſtehen; 4) die drey geraden Linien, die den Fuſs dieſer Perpendikel zwey und zwey verbinden u. ſ. w. (*Fig.* 28.).

Wir wollen als die beyden gegebenen Winkel $A\hat{B}C$ und $A\hat{C}B$, als die bekannte Seite $\overline{AC}$ annehmen; man ſoll alſo alle in der vorher gebildeten Tafel aufgezählte Quantitäten in Werthen von den drey Quantitäten $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$ und $\overline{AC}$ finden.

Aber da durch die erſte Tafel alle dieſe Quantitäten in Werthen der drey $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, R ſich ausgedrückt finden, ſo braucht man nur die neuen gegebenen Quantitäten den vorigen zu ſubſtituiren.

Um den Ausdruck der zweyten Glieder abzukürzen, wollen wir annehmen, daſs

$$A\hat{B}C = B.$$
$$A\hat{C}B = C.$$
$$\overline{AC} = b.$$

Ferner ſuche ich unter den Formeln der vorigen Tafel die drey, welche die neuen Gegebenen $A\hat{B}C$, $A\hat{C}B$, $\overline{AC}$ in Werthen von m, n, R ausdrücken (die 6te, 9te und 14te Formel). Ich ziehe umgekehrt aus dieſen Formeln m, n, R in Werthen die drey andern, und ſetze ſie in alle Formeln der erſten Tafel. Daraus entſteht augenſcheinlich eine neue Tafel, wo

jede der Quantitäten des Syſtems, ſo wie man es verlangt, in Werthen von B, C, b ausgedrückt ſeyn wird.

Nun ſind die 6te, 7te und 14te Formel

$$B = \pi - m,$$

$$C = \pi - n,$$

$$b = 2R \,.\, \cos m.$$

Alſo aus dieſen drey Gleichungen muſs man die Werthe von m, n, R als unbekannte ziehen, um ſie in allen Formeln der Tafel zu ſubſtituiren.

Die erſte Gleichung giebt mir $m = \pi - B$; alſo $\sin m = \cos B$, und $\cos m = \sin B$.

Die zweyte giebt $n = \pi - C$; alſo $\sin n = \cos C$, und $\cos n = \sin C$.

Die dritte giebt, wenn ich für $\cos m$ den eben gefundenen Werth ſetze, $2R = \frac{b}{\sin B}$.

Man braucht alſo nur in der Tafel dieſe Werthe von m, n, R zu ſubſtituiren, um alle dahin gehörigen Quantitäten durch B, C, b ausgedrückt zu haben.

So entſteht folgende Tafel, die alſo der Aufgabe Genüge leiſtet.

Tafel, um, wenn in einem Dreyeck ABC zwey Winkel $\hat{ABC}$, $\hat{ACB}$ und die einem entgegengesetzte Seite AC bekannt sind, unmittelbar zu finden: 1) die drey andern in dem Dreyecke zu betrachtenden Dinge; 2) die Perpendikel aus jedem Winkel auf die entgegenstehende Seite gesenkt, alle Winkel und Segmente, die aus dieser Construktion entspringen u. s. w.

Man nimmt $\hat{ABC} = B$, $\hat{ACB} = C$, $\overline{AC} = b$ an (*Fig.* 28).

Werthe der Winkel.

1) $\hat{BAD} = \pi - B$.

2) $\hat{CAD} = \pi - C$.

3) $\hat{BAC} = 2\pi - (B + C)$.

4) $\hat{CBD} = \pi - C$.

5) $\hat{ABD} = (B + C) - \pi$.

6) $\hat{ABC} = B$.

7) $\hat{BCD} = \pi - B$.

8) $\hat{ACD} = (B + C) - \pi$.

9) $\hat{ACB} = C$.

10) $\hat{ADB} = 2\pi - C$.

11) $\hat{ADC} = 2\pi - B$.

12) $\hat{BDC} = B + C$.

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = b \dfrac{\sin (B + C)}{\sin B}$.

14) $\overline{AC} = b$.

15) $\overline{AB} = b \dfrac{\sin C}{\sin B}$.

16) $\overline{AD} = - b \frac{\cos (B+C)}{\sin B}$.

17) $\overline{BD} = b . \cot B$.

18) $\overline{CD} = b . \frac{\cos C}{\sin B}$.

19) $\overline{AH} = b . \sin C$.

20) $\overline{BH} = b . \sin C . \cot B$.

21) $\overline{CH} = b . \cos C$.

22) $\overline{DH} = b . \cos C . \cot B$.

23) $\overline{AF} = - b . \cos (B+C)$.

24) $\overline{BF} = b . \cot B . \sin (B+C)$.

25) $\overline{CF} = b . \sin (B+C)$.

26) $\overline{DF} = - b . \cot B . \cos (B+C)$.

27) $\overline{AG} = - b \frac{\sin C . \cos (B+C)}{\sin B}$.

28) $\overline{BG} = b . \frac{\sin C . \sin (B+C)}{\sin B}$.

29) $\overline{CG} = b \frac{\cos C . \sin (B+C)}{\sin B}$.

30) $\overline{DG} = - b . \frac{\cos C . \cos (B+C)}{\sin B}$.

31) $\overline{FG} = - b . \frac{\sin (B+C) . \cos (B+C)}{\sin B}$.

32) $\overline{FH} = b . \cos B$.

33) $\overline{GH} = b \frac{\sin C . \cos C}{\sin B}$.

34) $R = \frac{b}{2 . \sin B}$.

35) $P = b \frac{\sin B + \sin C + \cos (B+C)}{2 \sin B}$.

$$36)\ r = b\,\frac{\cos B + \cos C + \cos (B+C) - 1}{2 \sin B}.$$

$$37)\ S = \tfrac{1}{2} b^2 \,.\, \sin (B+C)\, \frac{\sin C}{\sin B}.$$

Die vorhergehende Tafel iſt nur auf das Dreyeck anwendbar, das man als Urſyſtem annahm; d. h. welches drey ſpitzige Winkel hat. So muſs man hier die ſchon (147 folgg.) gemachten Bemerkungen wiederholen, aus denen ſich ergiebt:

1) In keinem Fall ſind mit den zweyten Gliedern der Formeln Veränderungen vorzunehmen, um ſie auf die correlativen Syſteme anwendbar zu machen, weil keine von den drey Quantitäten B, C, b weder durch 0, noch durch ∞ geht.

2) Wird $B\hat{A}C$ ſtumpf, ſo muſs man die Zeichen von $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$ darin verändern.

3) Wird $A\hat{B}C$ ſtumpf, ſo verändert man die Zeichen von $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$.

4) Wird $A\hat{C}B$ ſtumpf, ſo verändert man die Zeichen von $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{GH}$.

Eilfte Aufgabe.

161. Es ſind in einem Dreyecke zwey Winkel und die dazwiſchen liegende Seite gegeben, und man ſucht 1) den dritten Winkel und die beyden andern Seiten, 2) die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten, 3) die

Segmente und Winkel, die aus den Durchſchnitten dieſer Linien entſtehen, 4) die drey Linien, die den Fuſs dieſer Perpendikel verbinden u. ſ. w.

Die Winkel (*Fig.* 28.) ſeyen $A\hat{B}C = B$, $A\hat{C}B = C$, die Seite $\overline{BC} = a$.

Ich ſuche in den Formeln der Grundtafel (146) diejenigen, welche die neuen Gegebenen in Werthen der drey erſten m, n, R ausdrücken, nämlich die 6te, 9te und 13te,

$$B = \pi - m,$$
$$C = \pi - n,$$
$$a = 2R \,.\, \sin(m + n).$$

Aus dieſen Gleichungen ziehe man m, n, R, als Unbekannte, um ſie in allen Formeln der Tafel zu ſubſtituiren.

Die erſte Gleichung giebt mir $m = \pi - B$, folglich $\sin m = \cos B$, und $\cos m = \sin B$.

Die zweyte giebt $n = \pi - C$, folglich $\sin n = \cos C$, und $\cos n = \sin C$.

Die dritte $a = 2R \,.\, \sin(B + C)$, alſo $R = \frac{a}{2\sin(B + C)}$.

Dieſe drey Werthe von m, n, R ſetzt man in die Grundtafel, um alle darin vorkommenden Quantitäten in B, C, a ausgedrückt zu erhalten, ſo entſteht folgende Tafel, die der Aufgabe Genüge leiſtet.

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = \pi - B$.

2) $C\hat{A}D = \pi - C$.

3) $B\hat{A}C = 2\pi - (B + C)$.

4) $C\hat{B}D = \pi - C$.

5) $A\hat{B}D = (B + C) - \pi$.

6) $A\hat{B}C = B$.

7) $B\hat{C}D = \pi - B$.

8) $A\hat{C}D = (B + C) - \pi$.

9) $A\hat{C}B = C$.

10) $A\hat{D}B = 2\pi - C$.

11) $A\hat{D}C = 2\pi - B$.

12) $B\hat{D}C = B + C$.

Werthe der Linien:

13) $\overline{BC} = a$.

14) $\overline{AC} = a \frac{\sin B}{\sin (B + C)}$.

15) $\overline{AB} = a . \frac{\sin C}{\sin (B + C)}$.

16) $\overline{AD} = - a . \cot (B + C)$.

17) $\overline{BD} = a . \frac{\cos B}{\sin (B + C)}$.

18) $\overline{CD} = a . \frac{\cos C}{\sin (B + C)}$.

19) $\overline{AH} = a . \frac{\sin B . \sin C}{\sin (B + C)}$.

20) $\overline{BH} = a . \frac{\sin C . \cos B}{\sin (B + C)}$.

21) $\overline{CH} = a . \frac{\sin B . \cos C}{\sin (B + C)}$.

22) $\overline{DH} = a . \frac{\cos B . \cos C}{\sin (B + C)}$.

23) $\overline{AF} = - a . \sin B . \cot (B + C)$.

24) $\overline{BF} = a . \cos B$.

25) $\overline{CF} = a \,.\, \sin B.$

26) $\overline{DF} = -\, a \,.\, \cos B \,.\, \cot (B + C).$

27) $\overline{AG} = -\, a \,.\, \cos C \,.\, \cot (B + C).$

28) $\overline{BG} = a \,.\, \sin C.$

29) $\overline{CG} = a \,.\, \cos C.$

30) $DG = -\, a \,.\, \cos C \,.\, \cot (B + C).$

31) $\overline{FG} = -\tfrac{1}{2} a \,.\, \frac{\sin (2B + 2C)}{\sin (B + C)}.$

32) $\overline{FH} = \tfrac{1}{2} a \,.\, \frac{\sin 2B}{\sin (B + C)}.$

33) $\overline{GH} = \tfrac{1}{2} a \, \frac{\sin 2C}{\sin (B + C)}.$

34) $R = \frac{a}{2 \sin (B + C)}.$

35) $P = a \,.\, \frac{\sin B + \sin C + \sin (B + C)}{\sin (B + C)}.$

36) $r = a \,.\, \frac{\cos B + \cos C - \cos (B + C) - 1}{2 \sin (B + C)}.$

37) $S = 2 a^2 \frac{\sin B \,.\, \sin C}{\sin (B + C)}.$

Man muſs bey dieſer Tafel dieſelben Betrachtungen wie bey der vorigen anſtellen; nachdem $B\hat{A}C$ oder $A\hat{B}C$ oder $A\hat{C}B$ ſtumpf wird, verändere man die Zeichen von $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, $\overline{AD}$, $\overline{AF}$, $\overline{DF}$, $\overline{AG}$, $\overline{DG}$, $\overline{FG}$, oder von $B\hat{A}D$, $B\hat{C}D$, $\overline{BD}$, $\overline{BH}$, $\overline{DH}$, $\overline{BF}$, $\overline{DF}$, $\overline{FH}$, oder endlich von $C\hat{A}D$, $C\hat{B}D$, $\overline{CD}$, $\overline{CH}$, $\overline{DH}$, $\overline{CG}$, $\overline{DG}$, $\overline{GH}$.

Zwölfte Aufgabe.

162. Es ſind in einem Dreyecke zwey Seiten, und der Winkel, welcher der einen gegen-

gegenüber ſteht, gegeben, man ſucht 1) die dritte Seite und die beyden andern Winkel, 2) die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberſtehenden Seiten, 3) die Segmente und Winkel, die aus den Durchſchnitten dieſer Linien entſtehen u. ſ. w.

Gegeben ſey (*Fig.* 28.) $\overline{AB} = c$, $\overline{AC} = b$, $A\hat{B}C = B$. Ich ziehe aus der Grundtafel die drey Gleichungen (die 14te, 15te und 6te):

$$b = 2R \, . \, \cos m$$
$$c = 2R \, . \, \cos n$$
$$B = \pi - m.$$

Hieraus ſoll ich m, n, R als Unbekannte beſtimmen, um ſie nachher in die Formeln der Tafel zu ſetzen.

Eliminire ich R aus den beyden erſten Gleichungen, ſo erhalte ich $b \, . \, \cos n = c \, . \, \cos m$. Da nun $\cos m = \sin B$, ſo habe ich auch $b \, . \cos n = c \, . \sin B$ oder $\cos n = \frac{c}{b} \sin B$. Setze ich denſelben Werth von $\cos m$ in die Gleichung $b = 2R \, . \, \cos m$, ſo erhalte ich $b = 2R \, . \, \sin B$ oder $R = \frac{b}{2 \sin B}$.

Es giebt alſo folgende Gleichungen, um m, n, R zu beſtimmen:

$$m = \pi - B$$
$$\sin m = \cos B$$
$$\cos m = \sin B$$
$$\cos n = \frac{c}{b} \sin B$$
$$\sin n = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \cdot \sin B^2}$$
$$R = \frac{b}{2 \sin B}.$$

Setzt man diese Werthe in die Grundtafel, so entsteht folgende, die der Aufgabe genug thut.

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = \pi - B.$

2) $\cos C\hat{A}D = \frac{c}{b} \sin B.$

3) $\sin B\hat{A}C = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

4) $\cos C\hat{B}D = \frac{c}{b} \sin B.$

5) $\cos A\hat{B}D = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

6) $A\hat{B}C = B.$

7) $B\hat{C}D = \pi - B.$

8) $\cos A\hat{C}D = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

9) $\sin A\hat{C}B = \frac{c}{b} \sin B.$

10) $\sin A\hat{D}B = \frac{c}{b} \sin B.$

11) $A\hat{D}C = 2\pi - B.$

12) $\sin B\hat{D}C = \frac{c}{b} \sin B . \cos B + \frac{\sin B}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}.$

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = c \cdot \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

14) $\overline{AC} = b$.

15) $\overline{AB} = c$.

16) $\overline{AD} = c \cdot \sin B - \cot B \cdot \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

17) $\overline{BD} = b \cdot \cot B$.

18) $\overline{CD} = \frac{1}{\sin B} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

19) $\overline{AH} = c \cdot \sin B$.

20) $\overline{BH} = c \cdot \cos B$.

21) $\overline{CH} = \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

22) $\overline{DH} = \cot B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

23) $\overline{AF} = c \cdot \sin B^2 - \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

24) $\overline{BF} = c \cdot \cos B^2 + \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

25) $\overline{CF} = c \cdot \sin B \cdot \cos B + \sin B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

26) $\overline{DF} = c \cdot \sin B \cdot \cos B - \cos B \cdot \cot B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

27) $\overline{AG} = \frac{c^2}{b} \sin B^2 - \frac{c}{b} \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

28) $\overline{BG} = \frac{c^2}{b} \sin B \cdot \cos B + \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

29) $\overline{CG} = \frac{c}{b} \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2} + b - \frac{c^2}{b} \sin B^2$.

30) $\overline{DG} = \frac{c}{b} \sin B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2} - b \cot B$

$$+ \frac{c^2}{b} \sin B \cdot \cos B.$$

31) $\overline{FG} = (c \cdot \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2})$

$$\left(\frac{c}{b} \sin B^2 - \frac{c}{b} \cos B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}\right).$$

32) $\overline{FH} = b \cdot \cos B$.

33) $\overline{GH} = \frac{c}{b} \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

34) $R = \frac{b}{2 \cdot \sin B}$.

35) $P = b + c + c \cdot \cos B + \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

36) $r = \frac{1}{2} c \cdot \sin B - \frac{1 - \cos B}{2 \cdot \sin B} (b - \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2})$.

37) $S = \frac{1}{2} c^2 \sin B \cdot \cos B + \frac{1}{2} c \cdot \sin B \sqrt{b^2 - c^2 \sin B^2}$.

Soll diese Tafel auf andere Dreyecke als spitzwinklichte bezogen werden, so braucht man nur die vorher angestellten Beobachtungen zu wiederholen.

Dreyzehnte Aufgabe.

163. In einem Dreyecke sind zwey Seiten und der eingeschlossene Winkel gegeben, man sucht dasselbe wie bey den vorigen Aufgaben.

Gegeben sey (*Fig.* 28.) $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$, $A\hat{B}C = B$. Wir sollen alle Quantitäten des Systems in Werthen von c, a, B ausdrücken.

Dazu gebrauche ich die 13te, 15te und 6te Formel der Grundtafel, nämlich

$$a = 2R \cdot \sin (m + n);$$

$$c = 2R \cdot \cos n;$$

$$B = \pi - m.$$

Daraus erhalte ich

$a \cdot \cos n = c \cdot \cos B \cdot \cos n + c \cdot \sin n \cdot \sin B$ oder

$\cos n \cdot (a - c \cdot \cos B) = c \cdot \sin B \sqrt{1 - \cos n^2}$ oder

$\cos n^2 (a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B) = c^2 \sin B^2$ oder

$\cos n = \frac{c \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$ und folglich

$\sin n = \frac{a - \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

Setzt man diesen Werth von $\cos n$ in die Gleichung $c = 2R \cdot \cos n$, so erhält man

$$R = \frac{1}{2 \sin B} \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$$

So entsteht folgende Tafel:

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = \pi - B$.

2) $\cos C\hat{A}D = \frac{2 \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

3) $\cos B\hat{A}C = \frac{c - a \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

4) $\cos C\hat{B}D = \frac{c \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

5) $\sin A\hat{B}D = \frac{c - a \cdot \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

6) $A\hat{B}C = B$.

7) $B\hat{C}D = \pi - B$.

8) $\sin A\hat{C}D = \frac{c - a \cdot \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

9) $\sin A\hat{C}B = \frac{c \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

10) $\sin A\hat{D}B = \frac{c \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

11) $A\hat{D}C = 2\pi - B$.

12) $\sin B\hat{D}C = \frac{a \cdot \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = a.$

14) $\overline{AC} = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}.$

15) $\overline{AB} = c.$

16) $\overline{AD} = \frac{c - a \,.\, \cos B}{\sin B}.$

17) $\overline{BD} = \cot B \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}.$

18) $\overline{CD} = \frac{a - c \,.\, \cos B}{\sin B}.$

19) $\overline{AH} = c \,.\, \sin B.$

20) $\overline{BH} = c \,.\, \cos B.$

21) $\overline{CH} = c - c \,.\, \cos B.$

22) $\overline{DH} = a \cot B - c \,.\, \cos B \,.\, \cot B.$

23) $\overline{AF} = c - a \,.\, \cos B.$

24) $\overline{BF} = a \,.\, \cos B.$

25) $\overline{CF} = a \,.\, \sin B.$

26) $\overline{DF} = c \,.\, \sin C \,.\, \cot B - a \,.\, \cos B \,.\, \cot B.$

27) $\overline{AG} = \frac{c^2 - ac \,.\, \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}}.$

28) $\overline{BG} = \frac{ac \,.\, \sin B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}}.$

29) $\overline{CG} = \frac{a^2 - a \,.\, \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}}.$

30) $\overline{DG} = \frac{(a - c \,.\, \cos B)(c - a \,.\, \cos B)}{\sin B \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}}.$

31) $\overline{FG} = \frac{ac - a^2 \,.\, \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}}.$

32) $\overline{FH} = \cos B \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}.$

33) $\overline{GH} = \frac{ac - c^2 \,.\, \cos B}{\sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \,.\, \cos B}}.$

34) $R = \frac{1}{2 \cdot \sin B} \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$.

35) $P = a + c + \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}$.

36) $r = \frac{ac \cdot \sin B}{a + c + \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos B}}$.

37) $S = \frac{1}{2} ac \cdot \sin B$.

Man muſs hier dieſelben Betrachtungen anſtellen wie (162).

Vierzehnte Aufgabe.

164. In einem Dreyecke ſind die drey Seiten gegeben, man ſucht die drey Winkel und alles übrige wie vorhin.

Gegeben ſey $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ (*Fig.* 28.); man ſoll alſo alle in der Tafel aufgeführte Quantitäten in Werthen dieſer drey finden.

Dazu dient mir die 13te, 14te und 15te Formel der Grundtafel, nämlich

$$a = 2R \cdot \sin (m + n)$$
$$b = 2R \cdot \cos m$$
$$c = 2R \cdot \cos n.$$

Aus dieſen drey Gleichungen ſoll ich die Werthe von m, n, R ziehen und ſie in die Formeln der Grundtafel ſetzen. Ich entwickele dazu $\sin (m + n)$, ſo erhalte ich

1) $a = 2R \cdot \sin m \cdot \cos n + 2R \cdot \sin n \cdot \cos m$.

2) $b = 2R \cdot \cos m$.

3) $c = 2R \cdot \cos n$.

Setze ich in die erſte für $\cos m$ deſſen Werth

aus der zweyten, und für $cos\, n$ dessen Werth aus der dritten, so erhalte ich

$$a = c \,.\, sin\, m + b \,.\, sin\, n.$$

Schafft man nun R aus den letzten beyden, so kommt

$$b \,.\, cos\, n = c \,.\, cos\, m.$$

Aus diesen beyden neuen Gleichungen muſs man m und n ziehen.

In der ersten versetze ich $b \,.\, sin\, n$ und quadrire, so kommt

$$a^2 + b^2\, sin\, n^2 - 2ab \,.\, sin\, n = c^2\, sin\, m^2,$$

auch die zweyte quadrire ich, das giebt

$$b^2\, cos\, n^2 = c^2 \,.\, cos\, m^2.$$

Addire ich diese Gleichung zur vorigen, so kommt, weil bekanntlich $sin\, m^2 + cos\, m^2 = 1$,

$$a^2 + b^2 - 2ab \,.\, sin\, n = c^2, \text{ alſo } sin\, n = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\text{eben ſo } sin\, m = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$$

Nun soll man R finden. Aus der letzten folgt

$$cos\, m = \frac{1}{2ac} \sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}.$$

Hieraus, und aus (2) ergiebt sich

$$R = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}}.$$

Statt dieses Werthes wird man in der Tafel nur, um Raum zu sparen, R setzen.

Werthe der Winkel.

1) $sin\, B\hat{A}D = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}.$

2) $\sin C\hat{A}D = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

3) $\cos B\hat{A}C = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

4) $\sin C\hat{B}D = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

5) $\sin A\hat{B}D = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

6) $\cos A\hat{B}C = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

7) $\sin B\hat{C}D = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

8) $\sin A\hat{C}D = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$.

9) $\cos A\hat{C}B = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$.

10) $\cos A\hat{D}B = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{2ab}$.

11) $\cos A\hat{D}C = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{2ac}$.

12) $\cos B\hat{D}C = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{2bc}$.

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = a$.

14) $\overline{AC} = b$.

15) $\overline{AB} = c$.

16) $\overline{AD} = R \,.\, \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}$.

17) $\overline{BD} = R \,.\, \frac{a^2 + c^2 - b^2}{ac}$.

18) $\overline{CD} = R \,.\, \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab}$.

19) $\overline{AH} = \frac{bc}{2R}$.

20) $\overline{BH} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$.

21) $\overline{CH} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}$.

22) $\overline{DH} = R \cdot \frac{(a^2 + c^2 - b^2)(a^2 + b^2 - c^2)}{2a^2bc}$.

23) $\overline{AF} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2c}$.

24) $\overline{BF} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2c}$.

25) $\overline{CF} = \frac{ab}{2R}$.

26) $\overline{DF} = R \cdot \frac{(b^2 + c^2 - a^2)(a^2 + c^2 - b^2)}{2c^2ab}$.

27) $\overline{AG} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}$.

28) $\overline{BG} = \frac{ac}{2R}$.

29) $\overline{CG} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2b}$.

30) $\overline{DG} = R \cdot \frac{(a^2 + b^2 - c^2)(b^2 + c^2 - a^2)}{2b^2ac}$.

31) $\overline{FG} = \frac{a(b^2 + c^2 - a^2)}{2bc}$.

32) $\overline{FH} = \frac{b(a^2 + c^2 - b^2)}{2ac}$.

33) $\overline{GH} = \frac{c(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$.

34) $R = \frac{abc}{\sqrt{2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - (a^4 + b^4 + c^4)}}$

35) $P = a + b + c$.

$$36)\ r = \tfrac{1}{2} \sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a+c-b)\,(b+\quad-a)}{a+b+c}}.$$

$$37)\ s = \sqrt{\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-a\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-b\right)\left(\frac{a+b+c}{2}-c\right)}.$$

Man kann dieſelben Betrachtungen wie (162) hier anſtellen.

Funfzehnte Aufgabe.

165. In einem Dreyecke iſt der Perpendikel aus einem Winkel auf die gegenüberſtehende Seite gegeben, ſo wie auch die beyden Segmente, die er darauf bildet, man ſucht die drey Seiten und drey Winkel dieſes Dreyecks u. ſ. w.

Die beyden Segmente $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ (*Fig.* 28.) ſollen x und x' heiſsen, der Perpendikel $\overline{AH}$ heiſse y.

In der 19ten, 20ſten, 21ſten Formel der Grundtafel (146) finde ich x, x', y in Werthen von m, n, R, nämlich

1) $y = 2R \,.\, cos\, m \,.\, cos\, n$

2) $x = 2R \,.\, sin\, m \,.\, cos\, n$

3) $x' = 2R \,.\, sin\, n \,.\, cos\, m$.

Schaffe ich R aus den beyden erſten, ſo erhalte ich $\frac{x}{y} = \frac{sin\, m}{cos\, m}$; aus der erſten und dritten, ſo kommt $\frac{x'}{y} = \frac{sin\, n}{cos\, n}$.

Die erſte Gleichung giebt $\frac{x^2}{y^2} = \frac{1 - \cos m^2}{\cos m^2}$ oder

$\cos m = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, alſo $\sin m = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Eben ſo hat man $\cos n = \frac{y}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$ und $\sin n$

$= \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

Setze ich dieſe Werthe von $\cos m$ und $\cos n$ in (1), ſo erhalte ich

$$R = \frac{1}{2y} \sqrt{(x^2 + y^2)(x'^2 + y^2)}.$$

Daraus entſteht folgende Tafel.

Werthe der Winkel.

1) $\text{tang } B\hat{A}D = \frac{x}{y}$.

2) $\text{tang } C\hat{A}D = \frac{x'}{y}$.

3) $\text{tang } B\hat{A}C = \frac{y(x + x')}{y^2 - xx'}$.

4) $\text{tang } C\hat{B}D = \frac{x'}{y}$.

5) $\text{tang } A\hat{B}D = \frac{y^2 - xx'}{y(x \pm x')}$.

6) $\text{tang } A\hat{B}C = \frac{y}{x}$.

7) $\text{tang } B\hat{C}D = \frac{x}{y}$;

8) $\text{tang } A\hat{C}D = \frac{y^2 - xx'}{y(x + x')}$.

9) $\tang A\hat{C}B = \frac{y}{x'}$.

10) $\tang A\hat{D}B = -\frac{y}{x'}$.

11) $\tang A\hat{D}C = -\frac{y}{x}$.

12) $\tang B\hat{D}C = \frac{y(x + x')}{xx' - y^2}$.

Werthe der Linien.

13) $\overline{BC} = x + x'$.

14) $\overline{AC} = \sqrt{x'^2 + y^2}$.

15) $\overline{AB} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

16) $\overline{AD} = \frac{y^2 - xx'}{y}$.

17) $\overline{BD} = \frac{x}{y}\sqrt{x'^2 + y^2}$.

18) $\overline{CD} = \frac{x'}{y}\sqrt{x^2 + y^2}$.

19) $\overline{AH} = y$.

20) $\overline{BH} = x$.

21) $\overline{CH} = x'$.

22) $\overline{DH} = \frac{xx'}{y}$.

23) $\overline{AF} = \frac{y^2 - xx'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

24) $\overline{BF} = \frac{x(x + x')}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

25) $\overline{CF} = \frac{y(x + x')}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

26) $\overline{DF} = \frac{x}{y} \cdot \frac{y^2 - xx'}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

27) $\overline{AG} = \frac{y^2 - x x'}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

28) $\overline{BG} = \frac{y\,(x + x')}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

29) $\overline{CG} = \frac{x'(x + x')}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

30) $\overline{DG} = \frac{x'}{y} \cdot \frac{(y^2 - x x')}{\sqrt{x'^2 + y^2}}$.

31) $\overline{FG} = \frac{(x + x') \cdot (y^2 - x x)}{\sqrt{(x^2 \pm y^2)\,(x'^2 + y^2)}}$.

32) $\overline{FH} = x \sqrt{\frac{x'^2 + y^2}{x^2 + y^2}}$.

33) $\overline{GH} = x' \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{x'^2 + y^2}}$.

34) $R = \frac{1}{2y} \sqrt{(x^2 + y^2)\,(x'^2 + y^2)}$.

35) $P = x + x' \pm \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y^2}$.

36) $r = \frac{y\,(x + x')}{x + x' + \sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{x'^2 + y^2}}$.

37) $S = \frac{1}{2} y\,(x + x')$.

166. Alle diese Tafeln (160, 161, 162, 163, 164, 165) entspringen aus der einen Grundtafel (146). So ist es immer nur dieselbe Tafel unter verschiedenen Formen, die so geeignet ist, verschiedene Aufgaben aufzulösen. Diese Formen können sehr verändert werden, wenn man nach der Reihe immer drey verschiedene, doch von einander unabhängige, Gegebene nimmt. Die fünf Tafeln (160 bis 164) lösen die fünf Hauptprobleme der Trigonometrie in einer grösseren

Allgemeinheit wie gewöhnlich auf, und man kann die Grundtafel, oder jede abgeleitete, als folgende allgemeine Aufgabe in Gleichung gesetzt, betrachten, nämlich: wenn von den 37 in der Tafel aufgezählten Dingen 3 von einander unabhängige gegeben sind, die 34 übrigen zu finden. In dieser Aufgabe ist die gewöhnliche Trigonometrie wie ein besonderer Fall enthalten. In der folgenden, nur eine neue Ausdehnung der vorigen, werden wir die Zahl der in der Tafel aufgerechneten Quantitäten bis auf 101 bringen.

Sechszehnte Aufgabe.

167. Es sind in einem Dreyecke 2 Winkel und der Halbmesser des umschriebenen Kreises gegeben, man sucht 1) den dritten Winkel und die drey Seiten, 2) die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten, 3) die Linien, welche die Füsse dieser Perpendikel verbinden, 4) die Segmente auf allen diesen Linien bis zu ihrem Zusammenstossen verlängert, die dadurch gebildeten Winkel, den Halbmesser des eingeschriebenen Kreises, den Umfang und den Flächeninhalt des vorgegebenen Dreyecks.

Das Dreyeck sey ABC (*Fig.* 48.), die Winkel spitzig, A der gröſste, B der kleinste; $\overline{AH}$, $\overline{BG}$, $\overline{CF}$ seyen die Perpendikel aus den Winkeln auf die gegenüberstehenden Seiten, $\overline{FGL}$, $\overline{HFM}$, $\overline{HGN}$ die Linien, welche die Füſse der Perpendikel verbinden,

l, *m*, *n* die Punkte, wo ſie die Perpendikel treffen, *L*, *M*, *N* die, wo dieſelben Linien verlängert, die gegenüberſtehenden auch verlängerten Seiten treffen.

Alle Theile dieſer Figur ſollen alſo in Werthen der drey gegebenen gefunden werden.

Der dritte Winkel iſt das Supplement der Summe der beyden andern. Ich ſetze ihn alſo in die Formeln, um ſie ſymmetriſch in Hinſicht auf dieſe drey Winkel zu machen. Auch kann man ſo leicht, welchen man will, eliminiren, indem man an ſeine Stelle 2π — der Summe der beyden andern ſetzt.

Es ſind 9 Linien in dieſem Syſteme gezogen, auf jeder 4 Theilungspunkte, alſo 6 Segmente, wenn man die Linie ſelbſt mit rechnet, ſo kommen 54 Lineär-Quantitäten in Betracht, und mit dem Halbmeſſer des umſchriebenen Kreiſes u. ſ. w. 57.

Dieſe Linien, zwey und zwey genommen, bilden einen Winkel, alſo im Ganzen $\frac{9 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 36$. Dazu noch 8 Flächen der Dreyecke, giebt 101 Quantitäten.

Um Brüche zu vermeiden, habe ich für $\frac{1}{cos}$ die Secante, und für $\frac{1}{sin}$ die Coſecante geſetzt.

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}C = A$.
2) $A\hat{B}C = B$.
3) $A\hat{C}B = C$.
4) $A\hat{B}D = \pi - A$.
5) $A\hat{C}D = \pi - A$.

6) $B\hat{A}D$

6) $B\hat{A}D = \pi - B.$

7) $B\hat{C}D = \pi - B.$

8) $C\hat{A}D = \pi - C.$

9) $C\hat{B}D = \pi - C.$

10) $B\hat{D}C = 2\pi - A.$

11) $C\hat{D}A = 2\pi - B.$

12) $A\hat{D}B = 2\pi - C.$

13) $B\hat{D}F = A.$

14) $C\hat{D}H = B.$

15) $A\hat{D}G = C.$

16) $B\hat{H}F = A.$

17) $B\hat{F}H = C.$

18) $C\hat{G}H = B.$

19) $C\hat{H}G = A.$

20) $A\hat{F}G = C.$

21) $A\hat{G}F = B.$

22) $D\hat{H}F = \pi - A.$

23) $D\hat{H}G = \pi - A.$

24) $D\hat{G}H = \pi - B.$

25) $D\hat{G}F = \pi - B.$

26) $D\hat{F}G = \pi - C.$

27) $D\hat{F}H = \pi - C.$

28) $F\hat{H}G = 2\pi - 2A.$

29) $F\hat{G}H = 2\pi - 2B.$

30) $G\hat{F}H = 2\pi - 2C.$

31) $A\hat{l}F = \pi - (C - B).$

32) $BmH = \pi - (A - C).$

33) $CnG = \pi - (A - B).$

34) $A\hat{M}H = A - C.$

35) $B\hat{N}G = A - B.$

36) $C\hat{L}F = C - B.$

Werthe der Linien.

37) $\overline{BC} = 2R \cdot \sin A.$

38) $\overline{AC} = 2R \cdot \sin B.$

39) $\overline{AB} = 2R \cdot \sin C.$

40) $\overline{AD} = 2R \cdot \cos A.$

41) $\overline{BD} = 2R \cdot \cos B.$

42) $\overline{CD} = 2R \cdot \cos C.$

43) $\overline{AH} = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C.$

44) $\overline{BG} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin C.$

45) $\overline{CF} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B.$

46) $\overline{DH} = 2R \cdot \cos B \cdot \cos C.$

47) $\overline{DG} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos C.$

48) $\overline{DF} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B.$

49) $\overline{FG} = 2R \cdot \sin A \cdot \cos A.$

50) $\overline{AF} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos B.$

51) $\overline{GH} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos C.$

52) $\overline{AF} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos A.$

53) $\overline{AG} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos A.$

54) $\overline{BF} = 2R \cdot \sin A \cdot \cos B.$

55) $\overline{BH} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos B.$

56) $\overline{CG} = 2R \cdot \sin A \cdot \cos C.$

57) $\overline{CH} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos C.$

58) $\overline{Al} = 2R \cdot \sin B \cdot \sin C \cdot \cos A \cdot \sec(C - B).$

59) $\overline{Bm} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin C \cdot \cos B \cdot \sec(A - C).$

60) $\overline{Cn} = 2R \cdot \sin A \cdot \sin B \cdot \cos C \cdot \sec(A - B).$

61) $\overline{Dl} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sec(C - B).$

62) $\overline{Dm} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sec(A - C).$

63) $\overline{Dn} = 2R \cdot \cos A \cdot \cos B \cdot \cos C \cdot \sec(A - B).$

64) $\overline{Fl} = 2R \cdot \sin B \cdot \cos B \cdot \cos A \cdot \sec(C - B).$

65) $\overline{Gl} = 2R \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \cos A \cdot \sec(C - B).$

66) $Hm = 2R \cdot \sin C \cdot \cos C \cdot \cos B \cdot \sec(A - C).$

67) $\overline{Fm} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \cos A \,.\, \cos B \,.\, \sec(A - C)$.

68) $\overline{Gn} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \cos A \,.\, \cos C \,.\, \sec(A - B)$.

69) $\overline{Hn} = 2R \,.\, \sin B \,.\, \cos B \,.\, \cos C \,.\, \sec(A - B)$.

70) $\overline{lB} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \sin C \,.\, \cos B \,.\, \mathrm{cosec}(C - B)$.

71) $\overline{LC} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \cos C \,.\, \mathrm{cosec}(C - B)$.

72) $\overline{LH} = R \,.\, \sin 2B \,.\, \sin 2C \,.\, \mathrm{cosec}(C - B)$.

73) $\overline{LF} = R \,.\, \sin A \,.\, \sin 2B \,.\, \mathrm{cosec}(C - B)$.

74) $\overline{LG} = R \,.\, \sin A \,.\, \sin 2C \,.\, \mathrm{cosec}(C - B)$.

75) $\overline{Ll} = 2R \,.\, \sin 2B \,.\, \sin 2C \,.\, \mathrm{cosec}(2C - 2B)$.

76) $\overline{MA} = 2R \,.\, \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos A \,.\, \mathrm{cosec}(A - C)$.

77) $\overline{MC} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \cos C \,.\, \mathrm{cosec}(A - C)$.

78) $\overline{MG} = R \,.\, \sin 2A \,.\, \sin 2C \,.\, \mathrm{cosec}(A - C)$.

79) $\overline{MF} = R \,.\, \sin B \,.\, \sin 2A \,.\, \mathrm{cosec}(A - C)$.

80) $\overline{MH} = R \,.\, \sin B \,.\, \sin 2C \,.\, \mathrm{cosec}(A - C)$.

81) $\overline{Mm} = 2R \,.\, \sin 2A \,.\, \sin 2C \,.\, \mathrm{cosec}(2A - 2C)$.

82) $\overline{NB} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \sin C \,.\, \cos B \,.\, \mathrm{cosec}(A - B)$.

83) $\overline{NA} = 2R \,.\, \sin B \,.\, \sin C \,.\, \cos A \,.\, \mathrm{cosec}(A - B)$.

84) $\overline{NF} = R \,.\, \sin 2A \,.\, \sin 2B \,.\, \mathrm{cosec}(A - B)$.

85) $\overline{NH} = R \,.\, \sin C \,.\, \sin 2B \,.\, \mathrm{cosec}(A - B)$.

86) $\overline{NG} = R \,.\, \sin C \,.\, \sin 2A \,.\, \mathrm{cosec}(A - B)$.

87) $\overline{Nn} = 2R \,.\, \sin 2A \,.\, \sin 2B \,.\, \mathrm{cosec}(2A - 2B)$.

88) $\overline{lH} = R \,.\, \sin 2B \,.\, \sin 2C \,.\, \sec(C - B)$.

89) $\overline{mG} = R \,.\, \sin 2A \,.\, \sin 2C \,.\, \sec(A - C)$.

90) $\overline{nF} = R \,.\, \sin 2A \,.\, \sin 2B \,.\, \sec(A - B)$.

91) $R = R$.

92) $r = R \,.\, (\cos A + \cos B + \cos C - 1)$.

93) $P = 2R \,.\, (\sin A + \sin B + \sin C)$.

Werthe der Flächen.

94) $S = 2R^2 \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C$.

95) $\overline{ADB} = 2R^2 \,.\, \sin C \,.\, \cos A \,.\, \cos B$.

96) $\overline{ADC} = 2 R^2 . \sin C . \cos A . \cos C.$

97) $\overline{BDC} = 2 R^2 . \sin A . \cos B . \cos C.$

98) $\overline{FDH} = R^2 . \sin 2B . \cos A . \cos B . \cos C.$

99) $\overline{GDH} = R^2 . \sin 2C . \cos A . \cos B . \cos C.$

100) $\overline{FDG} = R^2 . \sin 2A . \cos A . \cos B . \cos C.$

101) $\overline{FGH} = \frac{1}{2} R^2 . \sin 2A . \sin 2B . \sin 2C.$

Die Berechnung der Flächen beruht auf dem Satze, daſs die Fläche jedes Dreyecks dem Produkte zweyer Seiten in den Sinus des eingeſchloſſenen Winkels gleich iſt. Wegen r vergleiche man (137).

Würde A ſtumpf, ſo werden die Quantitäten $\pi - A$, $2\pi - 2A$, $\cos A . \sec A . \sin 2A$ invers. In den zweyten Gliedern iſt nichts zu verändern, weil weder A, noch B, noch C, noch R durch o oder durch ∞ gegangen ſind. Man ſieht die Folgen leicht, wenn B oder C ſtumpf würde.

Eben ſo, wenn $B > C$, ſo würde $C - B$ invers. Daraus ſind die Veränderungen der Zeichen in den erſten Gliedern leicht zu beurtheilen. $C\hat{L}F$ würde —, ſo wie $\overline{AI}$, $\overline{DI}$ u. ſ. w.

168. Aus dieſer Tafel folgt die Auflöſung der allgemeinen Aufgabe:

Wenn drey von einander unabhängige Quantitäten aus den 101 in der Tafel enthaltenen gegeben ſind, die 98 unbekannten zu finden.

Man ſucht dann nur A, B, C, R in Werthen der neuen Gegebenen und ſetzt ſie in alle Formeln der Tafel.

Siebenzehnte Aufgabe.

169. Das Dreyeck ABC (*Fig.* 49.) ist in einem Kreise beschrieben, aus jedem Winkel lasse man einen Perpendikel auf die gegenüberstehende Seite, und verlängere es bis an den Umkreis, so entstehen, mit den Scheitelpunkten des Dreyecks, 6 Durchschnittspunkte auf diesem Umkreise, A, B, C, f, g, h. Nun verbinde man diese Punkte zwey und zwey durch eine Sehne, so verlangt man 1) den Werth dieser Sehnen, 2) den Werth der Winkel, den diese Sehnen zwey und zwey an den Durchschnittspunkten bilden, alles in Werthen derselben Quantitäten A, B, C, R ausgedrückt, die schon in der vorigen Ausgabe gebraucht wurden.

Man sieht leicht, daſs diese neue Aufgabe nur eine Ausdehnung der vorigen ist. Ich füge also die neuen Quantitäten hinzu, indem ich die Zahlen der vorigen Tafel fortsetze.

Werthe der Winkel.

102) $f\hat{A}B = \pi - B.$

103) $f\hat{A}h = 2\pi - 2B.$

104) $f\hat{A}C = \pi + (A - B).$

105) $f\hat{A}g = 2A.$

106) $B\hat{A}g = \pi + (A - C).$

107) $h\hat{A}g = 2\pi - 2C.$

108) $C\hat{A}g = \pi - C.$

109) $h\hat{B}C = \pi - C.$

110) $h\hat{B}g = 2\pi - 2C.$

111) $h\hat{B}A = \pi - (C - B).$

112) $h\hat{B}f = 2B.$

113) $C\hat{B}f = \pi - (A - B).$

114) $g\hat{B}F = 2\pi - 2A.$

115) $A\hat{B}f = \pi - A.$

116) $g\hat{C}A = \pi - A.$

117) $g\hat{C}f = 2\pi - 2A.$

118) $g\hat{C}B = \pi - (A - C).$

119) $g\hat{C}h = 2C.$

120) $A\hat{C}h = \pi + (C - B).$

121) $f\hat{C}h = 2\pi - 2B.$

122) $B\hat{C}h = \pi - B.$

123) $\hat{A}fg = \pi - A.$

124) $\hat{A}fC = B.$

125) $\hat{A}fh = \pi - (C - B).$

126) $\hat{A}fB = 2\pi - C.$

127) $g\hat{f}C = \pi - C.$

128) $g\hat{f}h = 2\pi - 2C.$

129) $g\hat{f}B = \pi + (A - C).$

130) $C\hat{f}h = \pi - C.$

131) $C\hat{f}B = A.$

132) $h\hat{f}B = \pi - B.$

133) $B\hat{h}f = \pi - B.$

134) $B\hat{h}A = C.$

135) $B\hat{h}g = \pi - (A - C).$

136) $B\hat{h}C = 2\pi - A.$

137) $f\hat{h}A = \pi - A.$

138) $f\hat{h}g = 2\pi - 2A.$

139) $f\hat{h}C = \pi - (A - B).$

140) $\hat{A}hg = \pi - A.$

141) $A\hat{h}C = B$.
142) $g\hat{h}C = \pi - C$.
143) $C\hat{g}h = \pi - C$.
144) $C\hat{g}B = A$.
145) $C\hat{g}f = \pi + (A - B)$.
146) $C\hat{g}A = 2\pi - B$.
147) $h\hat{g}B = \pi - B$.
148) $h\hat{g}f = 2\pi - 2B$.
149) $h\hat{g}A = \pi + (C - B)$.
150) $B\hat{g}f = \pi - B$.
151) $B\hat{g}A = C$.
152) $f\hat{g}A = \pi - A$.

Werthe der Linien.

153) $\overline{Af} = 2R \cdot cos A$.
154) $\overline{Ah} = 2R \cdot cos(C - B)$.
155) $\overline{Ag} = 2R \cdot cos A$.
156) $\overline{Bh} = 2R \cdot cos B$.
157) $\overline{Bg} = 2R \cdot cos(A - C)$.
158) $\overline{Bf} = 2R \cdot cos B$.
159) $\overline{Cg} = 2R \cdot cos C$.
160) $\overline{Cf} = 2R \cdot cos(A - B)$.
161) $\overline{Ch} = 2R \cdot cos C$.
162) $\overline{fg} = 2R \cdot sin 2A$.
163) $\overline{gh} = 2R \cdot sin 2C$.
164) $\overline{fh} = 2R \cdot sin 2B$.

Das jetzt aufgelöste Problem ist nur eine Folge des vorigen, man muss also dieselben Betrachtungen darauf anwenden.

Achtzehnte Aufgabe.

170. Das Dreyeck *ABC* ist in einem Kreise beschrieben (*Fig.* 50.). Wir wollen annehmen, dass man aus jedem Winkel an den Mittelpunkt des Kreises eine Linie ziehe, und dass man diese Linie bis an den Umkreis verlängere, so entstehen darauf, wenn man die drey Scheitelpunkte des Dreyecks mitrechnet, sechs Durchschnittspunkte A, B, C, f', g', h'. Man verbinde diese sechs Durchschnittspunkte zwey und zwey mit einer Sehne, dann wird verlangt, 1) der Werth jeder dieser Chorden, 2) der Werth jedes Winkels, den diese Sehnen an den Durchschnittspunkten machen, alles in Werthen von A, B, C, R wie in den vorigen Aufgaben ausgedrückt.

Man sieht gleich, dass diese neue Aufgabe nur eine Folge der beyden vorigen ist und man nur die zu dem System hinzugekommenen Quantitäten wie $\overline{Af'}$, $\overline{Ah'}$, $\overline{Ag'}$, $\overline{Bf'}$ u. s. w. in den bekannten Werthen auszudrücken braucht. Ich werde also nur die Zahlen der Formeln fortsetzen.

Die neue Tafel wird 69 neue Quantitäten enthalten, 12 Sehnen und 57 Winkel. An jedem der 6 Durchschnittspunkte entstehen nämlich 10, davon muss man aber die 3 Winkel des Dreyecks abrechnen.

Werthe der Winkel.

165) $f'\hat{A}B = \pi - A$.
166) $f'\hat{A}h' = B$.
167) $f'\hat{A}C = \pi$.
168) $f'\hat{A}g' = 2\pi - A$.
169) $B\hat{A}h' = \pi - C$.
170) $B\hat{A}g' = \pi$.
171) $h'\hat{A}C = \pi - B$.
172) $h'\hat{A}g' = C$.
173) $C\hat{A}g' = \pi - A$.
174) $h'\hat{B}C = \pi - B$.
175) $h'\hat{B}g' = C$.
176) $h'\hat{B}A = \pi$.
177) $h'\hat{B}f' = 2\pi - B$.
178) $C\hat{B}g' = \pi - A$.
179) $C\hat{B}f' = \pi$.
180) $g'\hat{B}A = \pi - C$.
181) $g'\hat{B}f' = A$.
182) $A\hat{B}f' = \pi - B$.
183) $g'\hat{C}A = \pi - C$.
184) $g'\hat{C}f' = A$.
185) $g'\hat{C}B = \pi$.
186) $g'\hat{C}h' = 2\pi - C$.
187) $A\hat{C}f' = \pi - B$.
188) $A\hat{C}h' = \pi$.
189) $f'\hat{C}B = \pi - A$.
190) $f'\hat{C}h' = B$.
191) $B\hat{C}h' = \pi - C$.
192) $A\hat{f'}g' = \pi - C$.
193) $A\hat{f'}C = B$.
194) $A\hat{f'}h' = \pi$.

195) $A\hat{f'}B = 2\pi - C$.

196) $g'\hat{f'}C = \pi - A$.

197) $g'\hat{f'}h' = C$.

198) $g'\hat{f'}B = \pi$.

199) $C\hat{f'}h' = \pi - B$.

200) $C\hat{f'}B = A$.

201) $h'\hat{f'}B = \pi - C$.

202) $B\hat{h'}f' = \pi - A$.

203) $B\hat{h'}A = C$.

204) $B\hat{h'}g' = \pi$.

205) $B\hat{h'}C = 2\pi - A$.

206) $f'\hat{h'}A = \pi - B$.

207) $f'\hat{h'}g' = A$.

208) $f'\hat{h'}C = \pi$.

209) $A\hat{h'}g' = \pi - C$.

210) $A\hat{h'}C = B$.

211) $g'\hat{h'}C = \pi - A$.

212) $C\hat{g'}h' = \pi - B$.

213) $C\hat{g'}B = A$.

214) $C\hat{g'}f' = \pi$.

215) $C\hat{g'}A = 2\pi - B$.

216) $h'\hat{g'}B = \pi - C$.

217) $h'\hat{g'}f' = B$.

218) $h'\hat{g'}A = \pi$.

219) $B\hat{g'}f' = \pi - A$.

220) $B\hat{g'}A = C$.

221) $f'\hat{g'}A = \pi - B$.

Werthe der Linien.

222) $\overline{Af'} = 2R . \cos B$.

223) $\overline{Ah'} = 2R$.

224) $\overline{Ag'} = 2R \cdot \cos C.$

225) $\overline{Bh'} = 2R \cdot \cos C.$

226) $\overline{Bg'} = 2R.$

227) $\overline{Bf'} = 2R \cdot \cos A.$

228) $\overline{Cg'} = 2R \cdot \cos A.$

229) $\overline{Cf'} = 2R.$

230) $\overline{Ch'} = 2R \cdot \cos B.$

231) $\overline{f'g'} = 2R \cdot \sin A.$

232) $\overline{g'h'} = 2R \cdot \sin C.$

233) $\overline{f'h'} = 2R \cdot \sin B.$

Es bedarf kaum der Erinnerung, daſs man hier die Betrachtungen 163 fg. wiederholen muſs.

Neunzehnte Aufgabe.

171. Das Dreyeck *ABC* iſt in einem Kreiſe beſchrieben (*Fig.* 51.), aus jedem Winkel zieht man eine Linie, die ihn halbirt, bis an die Peripherie, auf der alſo die Durchſchnittspunkte *A*, *B*, *C*, f'', g'', h'' entſtehen. Man verbinde dieſe Punkte durch Sehnen, ſo verlangt man 1) den Werth jeder Sehne, 2) den Werth jedes der Winkel, die durch dieſe Sehnen an den ſechs Durchſchnittspunkten gebildet ſind, alles in Werthen derſelben Quantitäten, *A*, *B*, *C*, *R*, ausgedrückt, die ſchon in den vorigen Aufgaben vorkamen.

Man ſieht leicht, daſs dieſe neue Aufgabe nur eine Folge der beyden vorhergehenden iſt, und daſs man nur die zum Syſtem hinzugekommenen Quan-

titäten, als $\overline{Af''}$, $\overline{Ah''}$ u. f. w. auf die verlangte Art auszudrücken braucht. Ich fahre alfo mit Nr. 234 fort. Hier werden 57 neue Winkel und 12 neue Linien vorkommen.

Werthe der Winkel.

234) $f''\hat{A}B = \frac{1}{2}C$.

235) $f''\hat{A}h'' = \pi - \frac{1}{2}B$.

236) $f''\hat{A}C = \pi + \frac{1}{2}(A - B)$.

237) $f''\hat{A}g'' = \pi + \frac{1}{2}A$.

238) $B\hat{A}h'' = \frac{1}{2}A$.

239) $B\hat{A}g'' = \pi + \frac{1}{2}(A - C)$.

240) $h''\hat{A}C = \frac{1}{2}A$.

241) $h''\hat{A}g'' = \pi - \frac{1}{2}C$.

242) $C\hat{A}g'' = \frac{1}{2}B$.

243) $h''\hat{B}C = \frac{1}{2}A$.

244) $h''\hat{B}g'' = \pi - \frac{1}{2}C$.

245) $h''\hat{B}A = \pi - \frac{1}{2}(C - B)$.

246) $h''\hat{B}f'' = \pi + \frac{1}{2}B$.

247) $C\hat{B}g'' = \frac{1}{2}B$.

248) $C\hat{B}f'' = \pi - \frac{1}{2}(A - B)$.

249) $g''\hat{B}A = \frac{1}{2}B$.

250) $g''\hat{B}f'' = \pi - \frac{1}{2}A$.

251) $A\hat{B}f'' = \frac{1}{2}C$.

252) $g''\hat{C}A = \frac{1}{2}B$.

253) $g''\hat{C}f'' = \pi - \frac{1}{2}A$.

254) $g''\hat{C}B = \pi - \frac{1}{2}(A - C)$.

255) $g''\hat{C}h'' = \pi + \frac{1}{2}C$.

256) $A\hat{C}f'' = \frac{1}{2}C$.

257) $A\hat{C}h'' = \pi + \frac{1}{2}(C - B)$.

258) $f''\hat{C}B = \frac{1}{2}C$.

259) $f''\hat{C}h'' = \pi - \tfrac{1}{2}B$.

260) $B\hat{C}h'' = \tfrac{1}{2}A$.

261) $A\hat{f''}g'' = \tfrac{1}{2}B$.

262) $A\hat{f''}C = B$.

263) $A\hat{f''}h'' = \pi - \tfrac{1}{2}(C - B)$.

264) $A\hat{f''}B = 2\pi - C$.

265) $g''\hat{f''}C = \tfrac{1}{2}B$.

266) $g''\hat{f''}h'' = \pi - \tfrac{1}{2}C$.

267) $g''\hat{f''}B = \pi + \tfrac{1}{2}(A - C)$.

268) $C\hat{f''}h'' = \tfrac{1}{2}A$.

269) $C\hat{f''}B = A$.

270) $h''\hat{f''}B = \tfrac{1}{2}A$.

271) $B\hat{h''}f'' = \tfrac{1}{2}C$.

272) $B\hat{h''}A = C$.

273) $B\hat{h''}g'' = \pi - \tfrac{1}{2}(A - C)$.

274) $B\hat{h''}C = 2\pi - A$.

275) $f''\hat{h''}A = \tfrac{1}{2}C$.

276) $f''\hat{h''}g'' = \pi - \tfrac{1}{2}A$.

277) $f''\hat{h''}C = \pi - \tfrac{1}{2}(A - B)$.

278) $A\hat{h''}g'' = \tfrac{1}{2}B$.

279) $A\hat{h''}C = B$.

280) $g''\hat{h''}C = \tfrac{1}{2}B$.

281) $C\hat{g''}h'' = \tfrac{1}{2}A$.

282) $C\hat{g''}B = A$.

283) $C\hat{g''}f'' = \pi + \tfrac{1}{2}(A - B)$.

284) $C\hat{g''}A = 2\pi - B$.

285) $h''\hat{g''}B = \tfrac{1}{2}A$.

286) $h''\hat{g''}f'' = \pi - \tfrac{1}{2}B$.

287) $h''\hat{g''}A = \pi + \tfrac{1}{2}(C - B)$.

288) $B\hat{g''}f'' = \tfrac{1}{2}C$.

289) $B\hat{g''}A = C.$

290) $f''\hat{g''}A = \frac{1}{2}C.$

Werthe der Linien.

291) $\overline{Af''} = 2R \,.\, \sin\frac{1}{2}C.$

292) $\overline{Ah''} = 2R \,.\, \cos\frac{1}{2}(C-B).$

293) $\overline{Ag''} = 2R \,.\, \sin\frac{1}{2}B.$

294) $\overline{Bh''} = 2R \,.\, \sin\frac{1}{2}A.$

295) $\overline{Bg''} = 2R \,.\, \cos\frac{1}{2}(A-C).$

296) $\overline{Bf''} = 2R \,.\, \sin\frac{1}{2}C.$

297) $\overline{Cg''} = 2R \,.\, \sin\frac{1}{2}B.$

298) $\overline{Cf''} = 2R \,.\, \cos\frac{1}{2}(A-B).$

299) $\overline{Ch''} = 2R \,.\, \sin\frac{1}{2}A.$

300) $\overline{f''g''} = 2R \,.\, \cos\frac{1}{2}A.$

301) $\overline{g''h''} = 2R \,.\, \cos\frac{1}{2}C.$

302) $\overline{f''h''} = 2R \,.\, \cos\frac{1}{2}B.$

172. Die vier letzten Aufgaben machen nur eine grofse allgemeine Aufgabe aus, nämlich diefe:

Wenn in einem Dreyeck von den 302 eben aufgezählten Dingen irgend 3, die aber von einander unabhängig feyn müffen, gegeben find, die 299 unbekannten zu finden.

Die Auflöfung ift aus dem vorigen bekannt, nur mufs man noch bemerken, dafs die Veränderungen der Zeichen, die eintreten müffen, wenn das Syftem, worauf fie fich beziehen, fich verändert, gleich aus der im vorigen Capitel entwickelten Theorie der Lineo-angulär-Quantitäten gefunden wird. Man fieht daraus gleich, dafs, weil keine von den Quan-

titäten A, B, C, R, aus denen die zweyten Glieder beſtehen, weder durch o, noch durch ∞ geht, in dieſen zweyten Gliedern nichts zu ändern iſt. Aber aus der Natur dieſer Winkel ſieht man, welche unter den erſten Gliedern das Zeichen — annehmen müſſen, damit die Formeln der allgemeinen Tafel auf die verſchiedenen Hypotheſen anwendbar werden, ohne daſs es nöthig ſey, deswegen eine neue Tafel der Correlation zu bilden.

173. Stellt man ſich die vier Figuren (48, 49, 50, 51), die zu den vier vorhergehenden Aufgaben gehören, in eine einzige vereinigt vor (*Fig.* 52.), ſo entſtehen auf dem Umkreiſe zwölf Durchſchnittspunkte; verbindet man dieſe durch Sehnen, ſo iſt jede Sehne und jeder Winkel, den die Sehnen an den zwölf Durchſchnittspunkten bilden, aus dieſer allgemeinen Tafel bekannt.

Stellt man ſich nun dieſe Sehnen unbeſtimmt verlängert vor, ſo entſtehen daraus viele neue Durchſchnittspunkte dieſer Linien unter ſich, und folglich neue Winkel, neue Segmente auf ihnen, deren Werthe man leicht aus der vorigen Tafel finden kann.

Es ſey $ABCDE$ (*Fig.* 53.) irgend ein eingeſchriebenes Polygon, deſſen Seiten, Diagonalen, und von den Diagonalen an den Punkten A, B, C, D, E gebildete Winkel bekannt ſind, ſo behaupte ich, daſs man leicht jeden Winkel wie $A\hat{H}C$, $A\hat{p}C$ finden kann, der nicht am Scheitelpunkte durch den Durchſchnitt dieſer Linien gebildet iſt. Eben ſo wird $\overline{EH}$, $\overline{pq}$ jedes Segment, eben dadurch innerhalb oder auſserhalb dem Kreiſe beſtimmt.

Man kennt $C\hat{E}D$, $A\hat{D}E$, alſo kennt man im Dreyecke $E\hat{p}D$ die beyden an der Grundlinie $\overline{ED}$ liegenden Winkel, der dritte $E\hat{p}D$, welcher der geſuchte Winkel iſt, iſt alſo auch bekannt. Eben ſo bey den andern.

Um das Segment $\overline{pq}$ zu haben, bemerke man nur, daſs man im Dreyecke $E\hat{p}D$ eine Seite $\overline{ED}$ und alle Winkel kennt.

174. Zieht man durch A einen der Scheitelpunkte einen Durchmeſſer AK, ſo iſt der Winkel, den dieſer Durchmeſſer mit jeder anderen Linie des Syſtems macht, bekannt. Denn wenn man $\overline{BK}$ zieht, ſo ſieht man, daſs $A\hat{B}K = \pi$, folglich iſt $B\hat{A}K$ das Complement von $A\hat{K}B$. Aber $A\hat{K}B$ iſt bekannt, weil es gleich jedem Winkel wie $A\hat{D}B$, und $A\hat{D}B$ unter den gegebenen Quantitäten iſt. So findet man alle andern Winkel und Segmente auf eben dieſem Durchmeſſer.

Zieht man ferner durch A eine Tangente, ſo iſt $B\hat{A}t = A\hat{D}B$. So ſind auch hier alle Winkel und Segmente bekannt.

Alle dieſe Quantitäten hätte man mit in der Tafel befaſſen können, aber um Verwirrung zu vermeiden, lieſs man ſie aus, da ſie ein jeder leicht aus den erſten Gründen der Geometrie und Trigonometrie beſtimmen kann.

175. Eben ſo leicht findet man den Inhalt eines jeden von dieſen Dreyecken; man braucht nur zwey Seiten durch den halben Sinus des eingeſchloſſenen Winkels zu multipliciren.

Zwan-

Zwanzigſte Aufgabe.

176. Ein Dreyeck *ABC* iſt in einem Kreiſe beſchrieben (*Fig.* 54.), an jedem Winkel *A*, *B*, *C* zieht man eine Tangente des Kreiſes, und verlängert dieſe Tangenten und die Seiten des Dreyecks, bis ſie ſich ſchneiden. Nun verlangt man alle Winkel und Linien dieſer Figur in Werthen von *A*, *B*, *C*, *R*.

Die Figur enthält 42 zu betrachtende Quantitäten, 15 Winkel, durch die 6 Linien der Figur gebildet, und 27 Linien, welche durch die Durchſchnittspunkte beſtimmt werden, nämlich 3 auf jeder Seite und 6 auf jeder Tangente.

Allgemeine Tafel der Verhältniſſe zwiſchen den Seiten des eingeſchriebenen Dreyecks *ABC*, den Seiten des umſchriebenen Dreyecks *A'B'C'*, deren Berührungspunkte in die Scheitel des eingeſchriebenen Dreyecks fallen, den Winkeln, die von dieſen Linien bis zu ihrem Zuſammenſtoſsen verlängert gebildet werden, und den Segmenten, die auf ihnen durch ihre Durchſchnitte beſtimmt ſind.

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}C = A.$

2) $A\hat{B}C = B.$

3) $A\hat{C}B = C.$

4) $B\hat{A}'C' = 2\pi - 2A.$

5) $A'\hat{B}'C' = 2\pi - 2B.$

6) $A'\hat{C}'B' = 2\pi - 2C.$

7) $C\hat{A}''B' = C - B.$

8) $A\hat{B}''C' = A - C.$

9) $B\hat{C}''A = A - B.$

10) $C'\hat{A}B = C.$

11) $C'\hat{B}A = C.$

12) $A'\hat{B}C = A.$

13) $A'\hat{C}B = A.$

14) $B'\hat{A}C = B.$

15) $B'\hat{C}A = B.$

Werthe der Linien.

16) $\overline{AB} = 2R \,.\, \sin C.$

17) $\overline{AC} = 2R \,.\, \sin B.$

18) $\overline{BC} = 2R \,.\, \sin A.$

19) $\overline{A'B} = 2R \,.\, \tan A.$

20) $\overline{A'C} = 2R \,.\, \tan A.$

21) $\overline{B'A} = 2R \,.\, \tan B.$

22) $\overline{B'C} = 2R \,.\, \tan B.$

23) $\overline{C'B} = 2R \,.\, \tan C.$

24) $\overline{C'A} = 2R \,.\, \tan C.$

25) $\overline{A''A} = 2R \,.\, \sin B \,.\, \sin C \,.\, \operatorname{cosec}(C - B).$

26) $\overline{A''B} = 2R \,.\, \sin C^2 \,.\, \operatorname{cosec}(C - B).$

27) $\overline{A''C} = 2R \,.\, \sin B^2 \,.\, \operatorname{cosec}(C - B).$

28) $\overline{B''B} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \sin C \,.\, \operatorname{cosec}(A - C).$

29) $\overline{B''C} = 2R \,.\, \sin A^2 \,.\, \text{cosec}\,(A - C)$.

30) $\overline{B''A} = 2R \,.\, \sin C^2 \,.\, \text{cosec}\,(A - C)$.

31) $\overline{C''C} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \sin B \,.\, \text{cosec}\,(A - B)$.

32) $\overline{C''B} = 2R \,.\, \sin A^2 \,.\, \text{cosec}\,(A - B)$.

33) $\overline{C''A} = 2R \,.\, \sin B^2 \,.\, \text{cosec}\,(A - B)$.

34) $\overline{A''B'} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \text{tang}\, B \,.\, \text{cosec}\,(C - B)$.

35) $\overline{A''C'} = 2R \,.\, \sin A \,.\, \text{tang}\, C \,.\, \text{cosec}\,(C - B)$.

36) $\overline{B'C'} = 2R \,.\, (\text{tang}\, B + \text{tang}\, C)$.

37) $\overline{B''A'} = 2R \,.\, \sin B \,.\, \text{tang}\, A \,.\, \text{cosec}\,(A - C)$.

38) $\overline{B''C'} = 2R \,.\, \sin B \,.\, \text{tang}\, C \,.\, \text{cosec}\,(A - C)$.

39) $\overline{C'A'} = 2R \,.\, (\text{tang}\, A + \text{tang}\, C)$.

40) $\overline{C''A'} = 2R \,.\, \sin C \,.\, \text{tang}\, A \,.\, \text{cosec}\,(A - B)$.

41) $\overline{C''B'} = 2R \,.\, \sin C \,.\, \text{tang}\, B \,.\, \text{cosec}\,(A - B)$.

42) $\overline{A'B'} = 2R \,.\, (\text{tang}\, A + \text{tang}\, B)$.

177. In dieſer Tafel nimmt man alle drey Winkel ſpitzig an, A als den gröſsten, B als den kleinſten. Aber man kann leicht die Veränderung der Zeichen finden, die eintreten muſs, wenn man annimmt, daſs ein Winkel wie A (*Fig.* 56.) ſtumpf wird, oder wenn $B > C$ (*Fig.* 55.). Man ſieht nämlich, daſs, weil A, B, C, R, die in den zweyten Gliedern vorkommen, weder durch 0, noch durch ∞ geht, in dieſen zweyten Gliedern keine Veränderung zu machen iſt. Aber aus der Natur dieſer Winkel ſieht man leicht, welche von den erſten Gliedern — haben müſſen.

Auch dieſe Aufgabe iſt nur eine Folge der vier vorigen, weil die darin vorkommenden Quantitäten alle in Werthen von A, B, C, R ausgedrückt ſind.

Man mufs bemerken, dafs die drey Punkte A'', B'', C'' fich nothwendigerweife in einer geraden Linie finden müffen, wie man leicht fieht.

Ein und zwanzigfte Aufgabe.

178. Das Viereck *ABDC* ift in einem Kreife befchrieben; man ziehe die beyden Diagonalen $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, und verlängere die entgegengefetzten Seiten, bis fie fich in *F*, *G* treffen. *E* fey der Durchfchnittspunkt der beyden Diagonalen. Nun verlangt man alle Linien und Winkel diefer Figur, in Werthen des Radius des Cirkels ausgedrückt, und der drey Winkel $B\hat{A}D$, $C\hat{A}D$, $A\hat{E}B$, welche eine Diagonale $\overline{AD}$ mit den Seiten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ und der andern Diagonale $\overline{BC}$ bildet.

Es fey

$$B\hat{A}D = m$$
$$C\hat{A}D = n$$
$$A\hat{E}C = k$$

und der Radius des Kreifes $= R$, daraus folgt folgende Tafel.

Allgemeine Tafel der Verhältniffe zwifchen allen Theilen des eingefchriebenen Vierecks.

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = m$.
2) $C\hat{A}D = n$.
3) $A\hat{E}C = k$.

4) $A\hat{E}B = 2\pi - k.$
5) $B\hat{A}C = m + n.$
6) $A\hat{B}C = k - m.$
7) $A\hat{C}B = 2\pi - (k + n).$
8) $C\hat{B}D = n.$
9) $B\hat{C}D = m.$
10) $B\hat{D}C = 2\pi - (m + n).$
11) $B\hat{D}F = m + n.$
12) $C\hat{D}G = m + n.$
13) $A\hat{D}B = 2\pi - (k + n).$
14) $A\hat{D}C = k - m.$
15) $A\hat{B}D = k + n - m.$
16) $A\hat{C}D = 2\pi - (k + n - m).$
17) $D\hat{B}F = 2\pi - (k + n - m).$
18) $D\hat{C}G = k + n - m.$
19) $A\hat{D}F = 2\pi - (k - m).$
20) $A\hat{D}G = k + n.$
21) $F\hat{B}C = 2\pi - (k - m).$
22) $G\hat{C}B = k + n.$
23) $B\hat{F}D = k - 2m.$
24) $C\hat{G}D = 2\pi - (k + 2n).$

Werthe der Linien.

25) $\overline{BC} = 2R \,.\, \sin\,(m + n).$
26) $\overline{AC} = 2R \,.\, \sin\,(k - m).$
27) $\overline{AB} = 2R \,.\, \sin\,(k + n).$
28) $\overline{AD} = 2R \,.\, \sin\,(k + n - m).$
29) $\overline{BD} = 2R \,.\, \sin m.$
30) $\overline{CD} = 2R \,.\, \sin n.$
31) $\overline{AE} = 2R \,.\, \sin\,(k + n)\, \sin\,(k - m)\, \operatorname{cosec} k.$
32) $\overline{BE} = 2R \,.\, \sin(k + n)\, \sin m \,.\, \operatorname{cosec} k.$

33) $\overline{CE} = 2R \,.\, \sin(k-m) \sin n \,.\, \operatorname{cosec} k.$
34) $\overline{DE} = 2R \,.\, \sin m \,.\, \sin n \,.\, \operatorname{cosec} k.$
35) $\overline{AF} = 2R.\sin(k-m) \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k-2m).$
36) $\overline{BF} = 2R \,.\, \sin m \,.\, \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k-2m).$
37) $CF = 2R \,.\, \sin(k-m) \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k-2m).$
38) $\overline{DF} = 2R \,.\, \sin m \,.\, \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k-2m).$
39) $\overline{AG} = 2R \,.\, \sin(k+n) \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k+2n).$
40) $\overline{BG} = 2R \,.\, \sin(k+n) \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k+2n).$
41) $\overline{CG} = 2R \,.\, \sin n \,.\, \sin(m+n) \operatorname{cosec}(k+2n).$
42) $\overline{DG} = 2R \,.\, \sin n \,.\, \sin(k+n-m) \operatorname{cosec}(k+2n).$
43) $R = R.$

179. Die Formeln der vorigen Tafel beziehen ſich nur auf die Figur, auf welche die Betrachtung gegründet war, d. h. wo die Punkte A, B, C, D ſich nach der Ordnung $ABDC$ folgen. Will man ſie nun auf den Fall anwendbar machen, wo ſie ſich in der Ordnung $ABCD$ (*Fig.* 58.) folgten, ſo darf man ſich nur vorſtellen, daſs die erſte Figur durch die Bewegung des Punktes C auf dem Bogen CDB, bis er über den Punkt D iſt, in dieſen neuen Zuſtand komme. Dann wird offenbar n invers, und da das die einzige Quantität von m, n, k, R iſt, die durch o gegangen iſt, ſo braucht man nur $-n$ in die Tafel ſtatt $+n$ zu ſetzen, und zu gleicher Zeit die Zeichen der erſten Glieder zu verändern, die dadurch invers geworden ſind.

Ständen die Punkte in der Ordnung $ADCB$ (*Fig.* 59.), ſo brauchte man nur eben ſo $-m$ zu ſetzen.

Dieſe drey Stellungen umfaſſen alle möglichen

Fälle, folglich kann man die Tafel auf jedes in einem Cirkel beſchriebene Vieleck anwenden.

180. Die vorige Tafel giebt alſo die Auflöſung der allgemeinen Aufgabe.

Wenn von den Quantitäten, die ein im Kreiſe beſchriebenes Viereck ausmachen, vier von einander unabhängige gegeben ſind, alle übrigen zu finden.

Z. B. man giebt die vier Seiten und verlangt das übrige.

Es ſey

$$\overline{AB} = a$$
$$\overline{AC} = b$$
$$\overline{BD} = c$$
$$\overline{CD} = d,$$

ſo geben die 26ſte, 27ſte, 29ſte und 30ſte Formel

$$b = 2R \,.\, \sin(k - m)$$
$$a = 2R \,.\, \sin(k + n)$$
$$c = 2R \,.\, \sin m$$
$$d = 2R \,.\, \sin n.$$

Man zieht alſo nur aus dieſen vier Gleichungen die Werthe von m, n, k, R, als unbekannte, und ſetzt ſie in die Formeln der Tafel. Bey der Rechnung ſelbſt kann ich mich hier um ſo weniger aufhalten, da ich noch im folgenden Abſchnitt auf eben dieſe Unterſuchung zurückkommen werde.

181. Wenn man annimmt, daſs im Viereck die zwey gegenüberſtehenden Winkel Rechte ſind, z. B. $A\hat{B}D$, $A\hat{C}D$, ſo werden wir haben $A\hat{B}D = \pi$, oder

$k + n - m = \pi$, oder $R = \pi + (m - n)$; ſetzt man dieſen Werth von k in die vorige Tafel, ſo erhält ſie dieſe Geſtalt:

Werthe der Winkel.

1) $B\hat{A}D = m$.
2) $C\hat{A}D = n$.
3) $A\hat{E}C = \pi + (m - n)$.
4) $A\hat{E}D = \pi - (m - n)$.
5) $B\hat{A}C = m + n$.
6) $A\hat{B}C = \pi - n$.
7) $A\hat{C}B = \pi - m$.
8) $C\hat{B}D = n$.
9) $B\hat{C}D = m$.
10) $B\hat{D}C = 2\pi - (m + n)$.
11) $B\hat{D}F = m + n$.
12) $C\hat{D}G = m + n$.
13) $A\hat{D}B = \pi - m$.
14) $A\hat{D}C = \pi - n$.
15) $A\hat{B}D = \pi$.
16) $A\hat{C}D = \pi$.
17) $B\hat{D}F = \pi$.
18) $D\hat{C}G = \pi$.
19) $A\hat{D}F = \pi - (2m - n)$.
20) $A\hat{D}G = k + m$.
21) $F\hat{B}C = \pi - (2m - n)$.
22) $G\hat{C}B = \pi + m$.

23) $B\hat{F}D = \pi - (m + n)$.

24) $C\hat{G}D = \pi - (m + n)$.

Werthe der Linien.

25) $\overline{BC} = 2R \,.\, \sin(m + n)$.

26) $\overline{AC} = 2R \,.\, \cos m$.

27) $\overline{AB} = 2R \,.\, \cos m$.

28) $\overline{AD} = 2R$.

29) $\overline{BD} = 2R \,.\, \sin m$.

30) $\overline{DC} = 2R \,.\, \sin n$.

31) $\overline{AE} = 2R \,.\, \cos m \,.\, \cos n \,.\, \sec(m - n)$.

32) $\overline{BE} = 2R \,.\, \sin m \,.\, \cos m \,.\, \sec(m - n)$.

33) $\overline{CE} = 2R \,.\, \sin n \,.\, \cos n \,.\, \sec(m - n)$.

34) $\overline{DE} = 2R \,.\, \sin m \,.\, \sin n \,.\, \sec(m - n)$.

35) $\overline{AF} = 2R \,.\, \cos n \,.\, \sec(m + n)$.

36) $\overline{BF} = 2R \,.\, \sin m \,.\, \tan(m + n)$.

37) $\overline{CF} = 2R \,.\, \cos n \,.\, \tan(m + n)$.

38) $\overline{DF} = 2R \,.\, \sin m \,.\, \sec(m + n)$.

39) $\overline{AG} = 2R \,.\, \cos m \,.\, \sec(m + n)$.

40) $\overline{BG} = 2R \,.\, \cos m \,.\, \tan(m + n)$.

41) $\overline{CG} = 2R \,.\, \sin n \,.\, \tan(m + n)$.

42) $\overline{DG} = 2R \,.\, \sin n \,.\, \sec(m + n)$.

43) $R = R$.

Zwey und zwanzigste Aufgabe.

182. Es ſind die vier Seiten eines Trapezes *ABDC* (*Fig.* 60.) gegeben; man ſucht

1) die beyden Diagonalen und ihre Segmente, 2) die Segmente auf den gegenüberſtehenden nicht parallelen Seiten, wenn ſie bis zu ihrem Zuſammentreffen verlängert ſind, 3) alle Winkel, welche aus den Durchſchnitten dieſer Linien entſtehen.

H ſey der Durchſchnittspunkt beyder Diagonalen, *E* der Durchſchnittspunkt der gegenüberſtehenden nicht parallelen Seiten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$. Ich ziehe durch *A*, $\overline{Am}$ parallel mit $\overline{ED}$, und durch *C*, $\overline{Cn}$ parallel mit $\overline{EB}$. Ich nehme ferner $\overline{AB} = a$, $\overline{CD} = b$, $\overline{AC} = c$, $\overline{BD} = d$.

Nun habe ich offenbar $\overline{Am} = b$, $\overline{Bm} = d - c$, alſo weil $\overline{Bm} : \overline{AB} = \overline{BD} : \overline{BE}$, auch $\overline{BE} = \frac{ad}{d-c}$; eben ſo $\overline{DE} = \frac{bd}{d-c}$; alſo $\overline{BE} - \overline{AB}$ oder $\overline{AE} = \frac{ac}{d-c}$; und $\overline{DE} - \overline{CD}$ oder $\overline{CE} = \frac{bc}{d-c}$.

Die Diagonalen und ihre Segmente findet man ſo. Das Dreyeck *ABD* giebt

$$\overline{AD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BD}^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{BD} \cdot \cos A\hat{B}D \text{ oder}$$
$$\overline{AD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos A\hat{B}D.$$

Eben ſo giebt das Dreyeck *ABm*, $\overline{Am}^2$ oder

$$b^2 = a^2 + (d-c)^2 - 2a(d-c) \cdot \cos A\hat{B}D.$$

Man multiplicire die erſte Gleichung mit $d - c$, die zweyte mit *d*, und ſubtrahire dann eine von der andern, ſo erhält man

$$\overline{AD}^2 = \frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}$$
$$\overline{BC}^2 = \frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}.$$

Jetzt ſind nur noch die Segmente zu ſuchen. Aus den Dreyecken BDH, ACD folgt

$$\overline{BH}:\overline{CH} = \overline{BD}:\overline{AC} \text{ oder } \overline{BC}:\overline{BH} = \overline{BD}+\overline{AC}:\overline{BD},$$

alſo $\overline{BH} = \frac{\overline{BC}.\overline{BD}}{\overline{BD}+\overline{AC}} = \frac{d}{d+c} r\left(\frac{a^2d-b^2c+cd(d-c)}{d-c}\right)$

Eben ſo

$$\overline{CH} = \frac{c}{d+c} r\left(\frac{a^2d-b^2c+cd(d-c)}{d-c}\right)$$

$$\overline{AH} = \frac{c}{d+c} r\left(\frac{b^2d-a^2c+cd.(d-c)}{d-c}\right)$$

$$\overline{DH} = \frac{d}{d+c} r\left(\frac{b^2d-a^2c+cd.(d-c)}{d-c}\right)$$

Wenn alle Linien ſo gefunden ſind, erhält man ohne Schwierigkeit die Winkel, aus dem bekannten Satze

$cos\,A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ u. ſ. w., wo A der Winkel iſt, der a gegenüber ſteht. Ich habe deswegen die Winkel in dieſer Tafel ausgelaſſen.

1) $\overline{AB} = a.$

2) $\overline{CD} = b.$

3) $\overline{AC} = c.$

4) $\overline{BD} = d.$

5) $\overline{BE} = \frac{ad}{d-c}.$

6) $\overline{DE} = \frac{bd}{d-c}.$

7) $\overline{AE} = \frac{ac}{d-c}.$

8) $\overline{CE} = \frac{bc}{d-c}.$

9) $\overline{AD} = r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

10) $\overline{BC} = r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

11) $\overline{BH} = \frac{d}{d+c}\, r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

12) $\overline{CH} = \frac{c}{d+c}\, r\left(\frac{a^2 d - b^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

13) $\overline{AH} = \frac{c}{d+c}\, r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

14) $\overline{DH} = \frac{d}{d+c}\, r\left(\frac{b^2 d - a^2 c + cd(d-c)}{d-c}\right)$.

Diese Formeln beziehen sich nur auf den Fall, wo $\overline{BD} > \overline{AC}$. Will man die Modifikationen beym Gegentheil wissen, so stelle man sich vor, dass $\overline{AC}$ (*Fig.* 61.) sich durch eine allmähliche Bewegung von A und C, auf $\overline{AC}$ selbst in entgegengesetzter Richtung, verlängere, wobey $\overline{BD}$ derselbe bleibt, so wie die Entfernung von $\overline{AC}$ zu $\overline{BD}$.

Durch diese Bewegung wird also keine der vier Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{CD}$, $\overline{BD}$ weder durch o, noch durch ∞ gehen, also keine invers werden. Eben so wenig $\overline{AD}$, $\overline{BC}$, $\overline{BH}$, $\overline{CH}$, $\overline{AH}$, $\overline{DH}$.

Nur $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$ sind durch ∞ gegangen, und könnten wohl invers werden; das ist denn auch in der That der Fall, denn jede von ihnen, $\overline{AE}$ z. B., hat einen Werth $\frac{ac}{d-c}$, der invers wird, weil hier $c > d$. Also um die gefundenen Formeln auf den Fall anwendbar zu machen, wo $\overline{AC} > \overline{BD}$, verändert man die Zeichen von $\overline{AE}$, $\overline{BE}$, $\overline{CE}$, $\overline{DE}$.

Man kann auch die Formeln, die ſich auf *Fig.* 58. beziehen, dadurch finden, daſs man ihre direkte Correlation mit der Urfigur aufſtellt.

Urſyſtem *ABCDEH*

Umgeformtes Syſtem . *BACDEH.*

Um alſo die vorher gefundenen Formeln auf *Fig.* 58. anzuwenden, ſetzt man nur gleich für *a*, *b*, *d*, *c* die vier Quantitäten $\overline{AB}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, welche ſie vorſtellen, dann nach dieſer Correlation für jeden Punkt den ihm entſprechenden Punkt, *B* ſtatt *A* u. ſ. w., ohne die Zeichen zu verändern. In den neuen Formeln kann man dann wieder $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ u. ſ. w., *a* . *b* u. ſ. w. ſetzen.

183. Vergleicht man die Formeln zwey und zwey u. ſ. w., ſo kann man verſchiedene Folgen daraus ziehen; z. B. quadrirt man die 9te und 10te, addirt und ſubtrahirt, ſo erhält man

$$\overline{AD}^2 + \overline{BC}^2 = a^2 + b^2 + 2bc, \overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 = (b^2 - a^2)\frac{d+c}{d-c}.$$

Aus der erſten Gleichung folgt der Satz:

In jedem Trapeze iſt die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der nicht parallelen Seiten vermehrt mit dem doppelten Produkt der parallelen Seiten.

Wodurch der bekannte Satz von Parallelogrammen noch mehr Allgemeinheit erhält. Der zweyte giebt uns dieſe Proportion:

$$\overline{AD}^2 - \overline{BC}^2 : b^2 - a^2 = d + c : d - c.$$

Eben dieſe Tafel giebt die Auflöſung der allgemeinen Aufgabe:

Wenn von den Quantitäten, aus denen ein Trapez besteht, vier von einander unabhängige gegeben sind, alle übrigen zu finden.

Drey und zwanzigste Aufgabe.

184. Wenn von allen Linien und Winkeln, die in einem einfachen Viereck mit seinen beyden Diagonalen zu betrachten sind, fünf von einander unabhängige gegeben sind, alle übrigen zu finden.

ABDC (*Fig.* 62.) sey das Viereck, *H* der Durchschnittspunkt beyder Diagonalen. Bey dieser Figur kommen 23 Dinge vor, 10 Linien und 13 Winkel, wenn man die vier Winkel, die die beyden Diagonalen machen, nur für einen rechnet. Man soll also diese 23 Quantitäten in Werthen von fünf unter ihnen ausdrücken, z. B. der vier Segmente auf den Diagonalen, und des Winkels, den sie bilden. Es sey also

$\overline{AH} = a.$
$\overline{BH} = b.$
$\overline{CH} = c.$
$\overline{DH} = d.$
$A\hat{H}C = k.$

Daraus entsteht folgende Tafel:

1) $\overline{AH} = a.$
2) $\overline{BH} = b.$
3) $\overline{CH} = c.$
4) $\overline{DH} = d.$
5) $A\hat{H}C = k.$
6) $\overline{AD} = a + d.$

7) $\overline{BC} = b + c.$

8) $\overline{AB} = \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos k)}.$

9) $\overline{AC} = \sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos k)}.$

10) $\overline{BD} = \sqrt{(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos k)}.$

11) $\overline{CD} = \sqrt{(c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos k)}.$

12) $\sin A\hat{B}H = \frac{a}{\sin k} \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos k)}.$

13) $\sin B\hat{A}H = \frac{b}{\sin k} \sqrt{(a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos k)}.$

14) $\sin D\hat{B}H = \frac{d}{\sin k} \sqrt{(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos k)}.$

15) $\sin B\hat{D}H = \frac{b}{\sin k} \sqrt{(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos k)}.$

16) $\sin D\hat{C}H = \frac{d}{\sin k} \sqrt{(b^2 + d^2 + 2bd \cdot \cos k)}.$

17) $\sin C\hat{D}H = \frac{c}{\sin k} \sqrt{(b^2 + d^2 + 2bd \cdot \cos k)}.$

18) $\sin C\hat{A}H = \frac{c}{\sin k} \sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos k)}.$

19) $\sin A\hat{C}H = \frac{c}{\sin k} \sqrt{(a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos k)}.$

20) $\cos B\hat{A}C =$

$$\frac{a^2 - bc + (ab - ac) \cdot \cos k}{\sqrt{((a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos k)\; a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos k))}}.$$

21) $\cos A\hat{B}D =$

$$\frac{b^2 - ad + (ba - bd) \cdot \cos k}{\sqrt{((a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos k)\,(b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos k))}}.$$

22) $\cos B\hat{D}C =$

$$\frac{d^2 - bc + (dc - db) \cdot \cos k}{\sqrt{((b^2 + d^2 - 2bd \cdot \cos k)\,(c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos k))}}.$$

23) $\cos \hat{ACD} =$

$$\frac{c^2 - ad + (cd - ca) \cdot \cos k}{\sqrt{((a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos k)(c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos k))}}.$$

Die Formeln dieſer Tafel beziehen ſich nur auf die vorgenommene Figur, d. h. wenn das Viereck heraustretende Winkel hat, und einen zuſammenhängenden Raum einſchlieſst. Aber nach der Correlationstafel (102) kann man ſie leicht auf jedes Viereck ausdehnen.

185. Die Methode, alle Verhältniſſe der Theile einer Figur durch analytiſche Formeln darzuſtellen und darauf die correlativen Figuren zu beziehen, ſcheint mir durch dieſe Beyſpiele genug entwickelt zu ſeyn. Ich bin überzeugt, daſs man groſsen Vortheil daraus ziehen kann, daſs dieſe Methode auf viele verſchiedene Figuren angewandt, das reichhaltigſte Mittel ſeyn wird, ihre Eigenſchaften zu entdecken und ſie durch ihre Analogien zu verbinden; eben ſo gewiſs wird man ſie mit glücklichem Erfolge auf andere Theile der Mathematik anwenden können.

Kurze Ueberſicht der Carnot'ſchen Theorie der ſogenannten negativen Quantitäten.

(Aus dem *Mémoire ſur la Relation qui exiſte entre les diſtances reſpectives de cinq points pris dans l'eſpace etc. pag.* 96.)

1. Die Natur der ſogenannten negativen Quantitäten war immer eine der hauptſächlichſten metaphyſiſchen Schwierigkeiten der Analyſis.

Jeden Augenblick führen die algebraiſchen Verrichtungen auf Ausdrücke von negativer Form. Was bedeuten ſie?

Es erhellet gleich, daſs abſolute Quantitäten die einzigen ſind, von denen man ſich einen deutlichen Begriff machen kann; die Zeichen + und —, die vor ihnen ſtehen, zeigen bloſs an ihnen vorzunehmende Verrichtungen an. So ſind die Ausdrücke $+a$, $-b$ complexe algebraiſche Formen, die weder eine Quantität, noch eine Verrichtung allein anzeigen, ſondern die Vereinigung beyder. Man kann alſo nicht, ohne der Evidenz zu ſchaden, die doch Grundlage aller mathematiſchen Wahrheiten iſt, dieſe Ausdrücke mit denen verwechſeln, die bloſse Quantitäten vorſtellen ſollen. Nun kann man aber $+a$ wie $0+a$ oder a anſehen; es fällt daher jeder Unter-

ſchied zwiſchen den ſogenannten poſitiven und den abſoluten Quantitäten weg, und die Schwierigkeit betrifft eigentlich nur die ſogenannten negativen Quantitäten.

2. Einigen ſind einzelne negative Quantitäten kleiner als 0; aber dieſe Meynung ſcheint keiner Vertheidigung fähig zu ſeyn, denn um eine ſolche Quantität zu erhalten, müſste man etwas von nichts nehmen können.

Eben ſo würde -4×-5 kleiner als 2×3 ſeyn müſſen, da bey dem erſten Produkt jeder Faktor einzeln genommen kleiner als bey dem zweyten wäre. Dennoch giebt das erſte $+20$, das zweyte nur $+6$.

Endlich, da man in jeder Rechnung alle Quantitäten, die $=0$ ſind, vernachläſsigen darf, ſo würde man mit noch gröſserem Rechte die, welche kleiner als 0 wären, nicht beachten dürfen. Aber jeder weiſs, welche grobe Fehler man durch Vernachläſsigung der negativen Quantitäten begehen würde.

3. Anderen ſind einzelne negative Quantitäten nur darin von poſitiven unterſchieden, daſs man ſie in entgegengeſetztem Sinne nehmen muſs, indeſſen ſagen ſie uns nicht, was ſie im Allgemeinen durch Quantitäten in entgegengeſetztem Sinn von einander genommen verſtehen. Sie führen freylich als Beyſpiele Schuldforderung und Schuld, Ordinaten rechts und links von der Abſciſſenaxe genommen an, aber Beyſpiele ſind keine allgemeine Erklärung. Noch dazu trügen die Regeln, welche man auf dieſem ſchwankenden Begriff erbaut hat, häufig, ſelbſt in den eben angeführten Fällen. Ein Beyſpiel ſey genug; die Secante eines Bogens, der in das dritte Viertel des Umkreiſes fällt, müſste nach den eben angeführten Regeln poſitiv ſeyn, weil ſie nach Gröſse und Richtung ganz in die Secante eines Bogens im erſten Viertel fällt. Da ſie nun aber negativ iſt, ſo

existirt hier offenbarer Widerspruch, und diese Meynung ist eben so unzuläsig wie die erste.

Noch mehr, wären die negativen Quantitäten wirkliche Quantitäten, was giebt ihnen bey der Multiplication das Vorrecht, dem Produkte ihr Zeichen zu geben? Warum kann man nicht aus beyden die Quadratwurzel ziehen? Warum soll die Quadratwurzel einer Schuldforderung, einer Ordinate rechts von der Axe genommen, eine wirkliche, die Quadratwurzel einer Schuld, einer Ordinate links von der Axe genommen, eine unmögliche Quantität seyn? Noch mehr, da man es in seiner Gewalt hat, die Seite der positiven Ordinaten zu bestimmen, so kann man nach Belieben dasselbe Ding möglich oder unmöglich machen, und durch den Zauberstab der Zeichen dem, was nicht seyn kann, Existenz geben, und das, was existirt, unmöglich machen. Gewifs, es ist den Geometern wohl nie eingefallen, dafs sie so mächtig wären.

4. Andere, ohne sich über die Natur isolirter negativer Quantitäten einzulassen, haben sich damit beschäftigt, ihren Gebrauch zu rechtfertigen, und gezeigt, dafs die durch sie erhaltenen Resultate immer mit denen übereinstimmen, die die Synthesis, oder Rechnungen ohne sie, liefern. Solche Arbeiten sind desto mehr zu schätzen, da es keine andere Art giebt, die Untrüglichkeit der analytischen Resultate zu beweisen. Indefs ist meine Absicht hier doch verschieden; ich will nicht untersuchen, wie man den Gebrauch der sogenannten negativen Quantitäten vermeiden könne, sondern vielmehr was ihr Wesen ausmache, wenn man sie braucht.

5. Der Ausdruck **negative Quantität** hat in der Algebra zwey verschiedene Bedeutungen.

Nach der ersten heifst er jede mit dem Zeichen — behaftete Quantität.

Nach der andern eine Quantität, die mit einem Zeichen behaftet ist, welches dem, das sie haben sollte, entgegengesetzt ist.

Z. B. in der bekannten Formel

$$\cos(a+b) = \cos a \, . \, \cos b - \sin a \, . \, \sin b \; . \; . \; . \; (A)$$

ist das letzte Glied nach der ersten Bedeutung negativ. So lange a, b und $a+b$ jedes für sich $<\pi$, bleibt das nämliche Glied positiv nach der zweyten Bedeutung, weil dieses Zeichen —, mit dem es behaftet ist, sein wahres Zeichen, das es haben muss, ist. Wird aber $a+b>\pi$, so ist die Formel falsch, und man erhält direkt durch Synthesis

$$\cos(a+b) = \sin a \, . \, \sin b - \cos a \, . \, \cos b \; . \; . \; . \; (B).$$

Soll also die erste Formel noch auf diesen Fall anwendbar seyn, so muss man das erste Glied $\cos(a+b)$ so ansehen, als sey es mit einem Zeichen behaftet, das dem, welches es haben sollte, entgegengesetzt ist, weil man in der That durch Verwechselung des Zeichens dieses Gliedes

$$-\cos(a+b) = \cos a \, . \, \cos b - \sin a \, . \, \sin b,$$

also eine Formel erhält, woraus durch Versetzung der Glieder (B) wird. Will man also (A), auch als auf den Fall, wo $a+b>\pi$ anwendbar, betrachten, so ist $\cos(a+b)$ dann mit einem Zeichen behaftet, das dem, welches er haben sollte, entgegengesetzt ist, und folglich eine negative Quantität nach der zweyten Bedeutung, obgleich er positiv nach der ersten ist.

Hieraus kann man den wesentlichen Unterschied beyder sehen. Dieselbe Quantität kann positiv nach der ersten, negativ nach der zweyten Bedeutung seyn, oder umgekehrt. Eine einfache Versetzung macht die positiv, die nach der ersten Bedeutung negativ war, dahingegen sie auch durch Versetzung immer negativ nach der zweyten Bedeutung bleibt, weil sie darum doch das Zeichen behält, das dem,

welches sie haben sollte, entgegengesetzt ist. Ist es wohl ein Wunder, wenn derselbe Ausdruck, für zwey so verschiedene Dinge gebraucht, Dunkelheit verursacht?

6. Um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, wollen wir den Ausdruck negative Quantitäten nur für die mit — behafteten brauchen, und die, welche ein Zeichen haben, das dem, welches sie haben sollten, entgegengesetzt ist, inverse Quantitäten, im Gegensatz direkter Quantitäten, nennen. Direkte sind nämlich, die das Zeichen, das sie haben sollen, haben.

Man sagt z. B., eine Schuld sey eine negative Schuldforderung, das heisst nun, wenn man in einer Rechnung eine für die andere nimmt, so wird die algebraische Quantität, die die zu bezahlende oder zu empfangende Summe vorstellt, ein dem Zeichen, welches sie eigentlich haben sollte, entgegengesetztes haben.

Es sey x die Quantität, die eine gewisse Person bezahlen oder empfangen soll, A das Vermögen dieser Person, B das, was sie, ohne x zu rechnen, besitzt. Ist nun x eine Schuldforderung, so hat man

$$A = B + x, \text{ oder } x = A - B,$$

ist im Gegentheil x eine Schuld, so hat man

$$A = B - x, \text{ oder } x = B - A.$$

Wenn man also in einer Rechnung x irriger Weise für eine Schuldforderung angenommen hätte, da es nur eine Schuld war, so hat man in die Rechnung $A - B$ statt $B - A$, oder $A - B$ statt $-(A - B)$, oder x statt $-x$ gesetzt, d. h. im Verlauf der Rechnung wird x ein Zeichen haben, das dem entgegengesetzt ist, welches x haben sollte, und welches x haben würde, wenn es wirklich das, was es vorstellen sollte, vorstellt.

7. Derselbe Fall tritt bey der Anwendung der Algebra auf die Geometrie ein, wenn man z. B. eine Ordinate, die links von der Abscissenaxe liegt, als rechts gelegen annimmt, wo der Buchstabe, durch den sie angezeigt wird, ein Zeichen bekommt, das dem entgegengesetzt ist, das er eigentlich haben sollte, und das er haben würde, wenn kein Irrthum in Ansehung der Stellung vorgefallen wäre. So wird dieser Buchstabe eine inverse Quantität ausdrücken.

8. Daraus erhellet, dass der höchste Grundsatz in der Theorie inverser Quantitäten dieser ist:

Jede inverse Quantität kann als der Unterschied zweyer direkten angesehen werden, wo man die grössere für die kleinere genommen hat, und umgekehrt.

So ist im vorigen Beyspiel x invers, weil man es als $A - B$ angenommen hat, da es eigentlich $B - A$ ist, d. h. weil von den beyden Quantitäten A, B, deren Unterschied x ist, $A > B$ angenommen ist, da es in der That kleiner ist.

Ueberhaupt sey p irgend eine inverse Quantität, die wir $= m - n$ annehmen. Weil nach der Hypothese p invers ist, so ist es mit einem Zeichen behaftet, das dem, welches es eigentlich haben sollte, entgegengesetzt ist; d. h. man hat in die Rechnung p statt $-p$ gesetzt, oder $m - n$ statt $n - m$; man hat also $m > n$ angenommen, da in der That $n < m$.

9. In dem Sinne muss man auch den wichtigen und bekannten Grundsatz verstehen, dass jede Veränderliche, die vom Positiven zum Negativen übergeht, nothwendig durch o oder durch ∞ gehen muss. Er sagt nur, dass jede Veränderliche, die vom direkten Zustande zum inversen übergeht, oder umgekehrt, nothwendig durch o oder durch ∞ gehen muss. Soll nämlich von zwey Quantitäten m, n die

grössere zur kleineren werden, so müssen beyde durch den Zustand der Gleichheit gehen, wo dann $m - n$ oder $n - m = 0$. Eben so geht p in $-p$ über, so wird auch aus $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{-p}$, also wird $\frac{1}{-p}$ auch invers, und geht durch ∞ in dem Augenblicke, da $p = 0$.

Wir wollen diese ganze Theorie auf einige neue Beyspiele anwenden.

10. Der Cosinus eines stumpfen Winkels ist eine inverse Quantität, weil in dem Ursystem, von dem man ausging, und auf das er bezogen wird, alle Winkel $< \pi$ sind, also $cos = 1 - sin\ vers.$, und $1 > sin\ vers.$ Wird aber der Winkel stumpf, so ist im Gegentheil $sin\ vers > 1$, und der Cosinus der Unterschied zweyer andern Quantitäten, von denen man die grössere als die kleinere ansah, folglich invers.

Soll daher die Urformel $cos = 1 - sin\ vers.$ für einen stumpfen Winkel gelten, so muss das Zeichen des Cosinus darin geändert werden, und man erhält

$$- cos = 1 - sin\ vers \text{ oder}$$
$$cos = sin\ vers - 1.$$

Eben so hat man aus den Urformeln

$$tang\ a = \frac{sin\ a}{cos\ a} = \frac{sin\ a}{1 - sin\ vers\ a} = \frac{sin\ a\,(1 - sin\ vers\ a)}{(1 - sin\ vers\ a)^2}$$
$$= \frac{sin\ a - sin\ a\ .\ sin\ vers\ a}{1 - 2\, sin\ vers\ a + sin\ vers^2 a},$$

$$\text{d. h. } tang\ a = \frac{sin\ a}{1 - 2\, sin\ vers\ a + sin\ vers^2 a}$$
$$- \frac{sin\ a\ .\ sin\ vers\ a}{1 - 2\, sin\ vers\ a + sin\ vers^2 a}.$$

Wird in diesen Formeln a stumpf, so hat man $sin\ vers\ a > 1$; also ist dann $tang\ a$ der Unterschied zweyer Quantitäten, von denen man die grössere als

die kleinere anſah, d. h. invers, und die wahre Formel für dieſen Fall iſt

$$tang\ a = \frac{\sin a\ (\sin vers\ a - 1)}{(\sin vers\ a - 1)^2}.$$

Dem ohnerachtet hat man doch immer $tang\ a = \frac{\sin a}{\cos a}$, weil in dieſer Gleichung $tang\ a$ und $\cos a$ zugleich invers werden. Man muſs alſo beyder Zeichen verändern, und erhält

$$- tang\ a = \frac{\sin a}{- \cos a}\ \text{oder}\ tang\ a = \frac{\sin a}{\cos a},$$

wobey man bemerken wird, daſs in dem Augenblicke, wo $tang\ a$ das Zeichen ändert, ſie durch ∞ geht, weil gerade da $\cos a$ durch o geht.

Eben ſo hat man im Urſyſtem

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1}{1 - \sin vers\ a} = \frac{1}{(1 - \sin vers\ a)^2} - \frac{\sin vers\ a}{(1 - \sin vers\ a)^2}.$$

Wird nun $a > \pi$, ſo wird auch $\sin vers\ a > 1$, und die Secante wird wie die Tangente invers. Die wahre Formel iſt dann

$$\sec a = \frac{\sin vers\ a}{(\sin vers\ a - 1)^2} - \frac{1}{(\sin vers\ a - 1)^2},$$

wo doch noch immer $\sec a = \frac{1}{\cos a}$, weil die Secante und der Coſinus zugleich invers werden.

Es iſt merkwürdig, daſs dieſs Beyſpiel, welches nach unſerer Theorie ſo leicht zu erklären iſt, ganz die Meynung mehrerer umſtöſst, denen negative Quantitäten nur gewöhnliche Quantitäten ſind, die man im entgegengeſetzten Sinne von den poſitiven genommen hat.

11. Man kann fragen, wozu es nütze, Quantitäten, die mit einem falſchen Zeichen behaftet ſind, in die Rechnung zu bringen, und ob es nicht ein-

facher ſey, einer jeden gleich das paſſende Zeichen zu geben?

Zuerſt erinnere ich dagegen, daſs man oft dazu gezwungen wird. Sucht man z. B. die Ordinate einer Curve, ohne die Gegend zu kennen, in der ſie ſich befindet, ſo muſs man dieſe doch erſt willkührlich annehmen. Fällt hierbey nun ein Irrthum vor, ſo findet man freylich den abſoluten Werth der geſuchten Ordinate, aber mit einem Zeichen, das dem, was ſie haben ſollte, entgegengeſetzt iſt. Man verbeſſert den begangenen Irrthum alſo leicht, indem man eine der erſten Annahme entgegengeſetzte Gegend annimmt.

12. Aber oft iſt auch der Irrthum nicht ſo leicht zu verbeſſern, und man ſieht ſich gezwungen, die Rechnung nach neuen Annahmen wieder anzufangen. Man glaube nie eine wahre Auflöſung erhalten zu haben, wenn man nicht für die Unbekannte einen poſitiven Werth gefunden hat, weil dieſe poſitiven Werthe die einzigen wahrhaſt verſtändlichen ſind, und alle andern nothwendigerweiſe eine Unverträglichkeit der gegebenen Bedingungen und der Annahmen, auf denen die Rechnung beruht, anzeigen. Man muſs alſo dieſe Annahmen ändern, oder die Bedingungen der Aufgabe ſo lange modificiren, bis man einen poſitiven Werth für die Unbekannte hat. Hat die Gleichung poſitive und negative Wurzeln, ſo geben nur die erſteren wahre Auflöſungen. Auf jede der anderen muſs man die Betrachtungen anwenden, die wir vorher angeſtellt haben, da eine einzige Wurzel einen negativen Werth erhielt. Mitunter ſind ſogar dieſe Wurzeln ganz ohne Bedeutung, und nichts wie bloſse algebraiſche Formen, die durch gewiſſe Umformungen in die Rechnung gebracht ſind, denen ſich die Gleichung im Verfolge der Behandlung unterwerfen muſste.

13. Doch nicht Nothwendigkeit allein begründet den Gebrauch inverſer Quantitäten, auch der Vortheil beſtimmt dazu, den ſie gewähren, durch eine einzige Formel ein veränderliches Syſtem in jedem Zuſtande darſtellen zu können. So würde man z. B., wenn man ſie nicht anwenden wollte, vier verſchiedene Gleichungen brauchen, um die vier Gegenden einer ebenen Curve darzuſtellen, die durch ihre beyden Axen getheilt wird, acht Gleichungen für eine krumme Oberfläche u. ſ. w., indeſs, wenn man inverſe Quantitäten braucht, eine Gleichung die vorigen acht umfaſst, wenn man nur am Ende der Rechnung das Zeichen der inverſen Quantitäten im Reſultate ändert.

14. Alles bisher Geſagte betrifft nur die inverſen Quantitäten, denen man fälſchlich den Namen negative gegeben hat, ich ſage fälſchlich, weil dieſer Ausdruck natürlicherweiſe nur für die paſſend ſeyn kann, die wirklich mit dem Zeichen — behaftet ſind, da die inverſen Quantitäten bald +, bald — haben.

Die eigentlichen negativen Quantitäten, von denen ich noch zu reden habe, machen gar keine Schwierigkeiten, wenn gröſsere poſitive Quantitäten vorhergehen, aber wenn man durch Verſetzung oder algebraiſche Umformung auf eine iſolirte negative Quantität, oder auf eine, die eine kleinere poſitive vor ſich hat, ſtöſst, oder im Allgemeinen auf einen algebraiſchen Ausdruck, der unausführbare Verrichtungen anzeigt, ſo muſs man dieſen Ausdruck als eine bloſse Form betrachten, die an und für ſich gar keine wahre Bedeutung hat, aber doch *implicite* die geſuchten Verhältniſſe der darin vorkommenden Quantitäten umfaſst. Das Abſurde und Unverſtändliche darin iſt durch Umformungen hineinge-

kommen, und muſs durch andere Umformungen verſchwinden, und nur, wenn ſie auf eine klare Form gebracht iſt, d. h. wenn ſie nur mögliche Verrichtungen anzeigt, darf man ſie nützlich anwenden. Bis dahin ſieht man ſie an wie einſtweilig unter eine unbedeutliche Form gebracht, bloſs um die Rechnung zu erleichtern.

Nur durch die Syntheſis beweiſet man die Regeln der algebraiſchen Zeichen, da man ſie nur auf bedeutliche Ausdrücke gründen kann. Man beweiſet nicht, daſs

$$+ a \times - b = - ab,$$

aber man beweiſet, daſs

$$+ a \times (B - b) = aB - ab,$$

wo $B > b$ angenommen wird. Nachher, wenn man $B = b$ oder $B = o$ annimmt, ſchlieſst man aus bloſser Analogie, daſs

$$+ a \times - b = - ab,$$

und dehnt ſo dieſe algebraiſche Regel auf jede Funktion aus, ſey ſie bedeutlich, oder nicht.

In dieſer Hinſicht muſs man die bloſs negativen Quantitäten als eingebildete betrachten, d. h. als bloſse algebraiſche Formen, da ja die letzteren nur die Quadratwurzeln der erſteren ſind, und kein Grund vorhanden iſt, warum die einen möglich ſeyn ſollten, wenn die andern es nicht ſind. Jede wirkliche Quantität muſs ihre Quadratwurzel haben, und wenn ſie ſie nicht hat, ſo iſt das ein Beweis, daſs ſie unmöglich iſt, beyde unterſcheiden ſich nur eigentlich genommen durch verſchiedene Grade der Unmöglichkeit.

15. Eben deswegen iſt die Arbeit der Gelehrten uns ſo wichtig, die dargethan haben, daſs die Reſultate, zu denen man durch den Gebrauch dieſer unbedeutlichen Formen kommt, nie ſich von denen

entfernen, die man durch andere Rechnungen erhält, ohne ſich ſolcher Formen zu bedienen. Eine Arbeit, die die Vorzüge der analytiſchen Methoden durch Beweis derer Reſultate ins hellſte Licht ſtellt, da ſie an und für ſich ſchon an Leichtigkeit und Kürze die ſynthetiſchen übertreffen. Ich bitte hier zu vergleichen, was ich S. 53 u. f. über Analyſis und Syntheſis geſagt habe.

16. Aus dem bisher Geſagten ſchlieſse iſt:

1) Daſs es keine andere Quantitäten, als die abſoluten giebt, mit denen man die ſogenannten poſitiven Quantitäten gleich ſtellen kann.

2) Daſs die Analytiker den Ausdruck negative Quantität in zwey weſentlich verſchiedenen Bedeutungen brauchen, einmal für die mit — behafteten, und dann für ſolche Quantitäten, deren Zeichen demjenigen, das ſie eigentlich haben ſollten, entgegengeſetzt iſt.

3) Daſs man daher, um Zweydeutigkeiten zu vermeiden, für dieſe beyden Arten zwey Benennungen feſtſetzen muſs, wo ich nun die erſten eigentliche negative Quantitäten, und die andern inverſe Quantitäten nenne.

4) Daſs die eigentlichen negativen Quantitäten iſolirt gedacht, eben ſo unmöglich wie die eingebildeten ſind, und daſs man beyde nur als bloſse algebraiſche Formen anſehen darf, die man nach der Analogie in der Rechnung für wirkliche Quantitäten braucht.

5) Daſs die Rechnung nur dann Bedeutung erhält, wenn man durch mehrere Umformungen auf ein klares Reſultat gekommen iſt, d. h. ein Reſultat, worin alle Quantitäten abſolute ſind, und durch die Zeichen nur mögliche Verrichtungen angezeigt werden.

6) Daſs der Gebrauch der negativen und eingebildeten Quantitäten in der Rechnung den eigentlichen Charakter der Analyſis ausmacht, ſie weſentlich von der Syntheſis unterſcheidet, und ihr ein ſo groſses Uebergewicht über die letzten giebt.

7) Daſs die inverſen Quantitäten immer einen in der Rechnung begangenen Irrthum und eine Unverträglichkeit unter den Bedingungen der Aufgabe und den Annahmen bey Setzung der Gleichung anzeigen.

8) Daſs, um dieſen Irrthum zu berichtigen, man die Bedingungen und Annahmen modificiren muſs, bis unter ihnen kein Widerſpruch mehr iſt, folglich auch keine inverſe Quantität im Reſultate.

9) Daſs man, um dieſe Modifikationen anzubringen, das Ende der Rechnung abwarten darf, weil ſie da oft einfach angedeutet ſind, daſs man die ganze Rechnung nicht von neuem wieder anzufangen braucht.

10) Daſs jede inverſe Quantität der Unterſchied zweyer direkten iſt, von denen man die gröſsere bey Setzung der Gleichung für die kleinere anſah, und umgekehrt.

11) Daſs man bloſs in dieſer letzten Bedeutung, und nicht mit Bezug auf die eigentlichen negativen Quantitäten, den bekannten Grundſatz verſtehen muſs, daſs jede Quantität, die vom Poſitiven zum Negativen, oder umgekehrt, übergeht, nothwendig durch 0 oder durch ∞ gehen muſs.

12) Daſs endlich durch dieſe Theilung der ſogenannten negativen Quantitäten in eigentliche

negative und inverſe nichts an den gewöhnlichen Verrichtungen der Rechnung geändert wird, ſondern daſs dadurch bloſs die Widerſprüche und die Zweydeutigkeiten verſchwinden, die nothwendigerweiſe entſtehen muſsten, da man zwey weſentlich verſchiedenen Dingen dieſelbe Benennung gab.

Ende des erſten Theils.

Verbeſſerungen.

Zuförderſt bitte ich dem Perpendikel, das ſich an mehreren Stellen ein *genus maſculinum* erſchlichen hat, ſein Geſchlecht zu nehmen, und es nach Verdienſt geſchlechtlos zu machen. Eben ſo für Funktion, direkt, Conſtruktion u. ſ. w. Function, direct, Conſtruction u. ſ. w. zu leſen.

Für Lineo-angulär-Quantitäten, bitte ich goniometriſche Funktionen zu ſetzen.

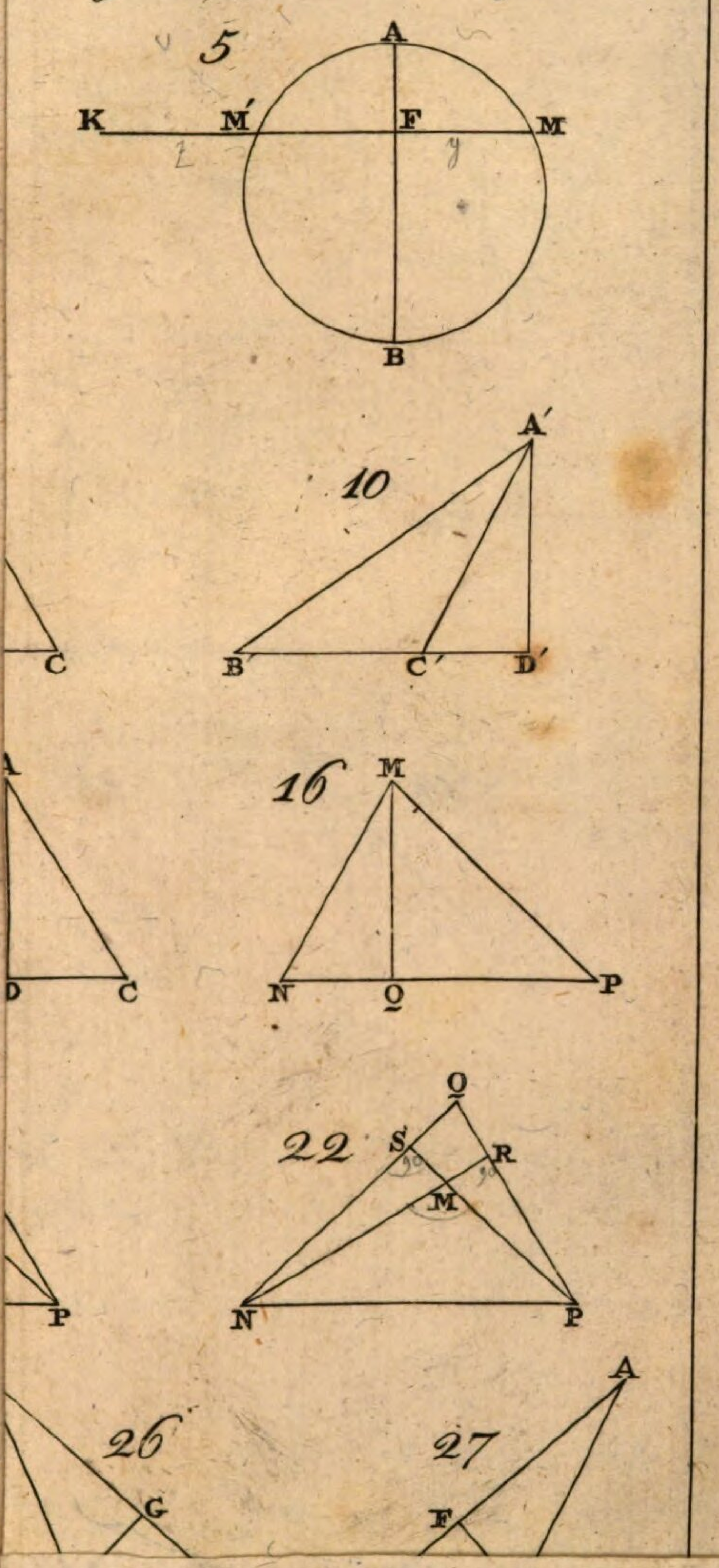
Sonſt habe ich nur folgende erhebliche Schreibfehler bemerkt.

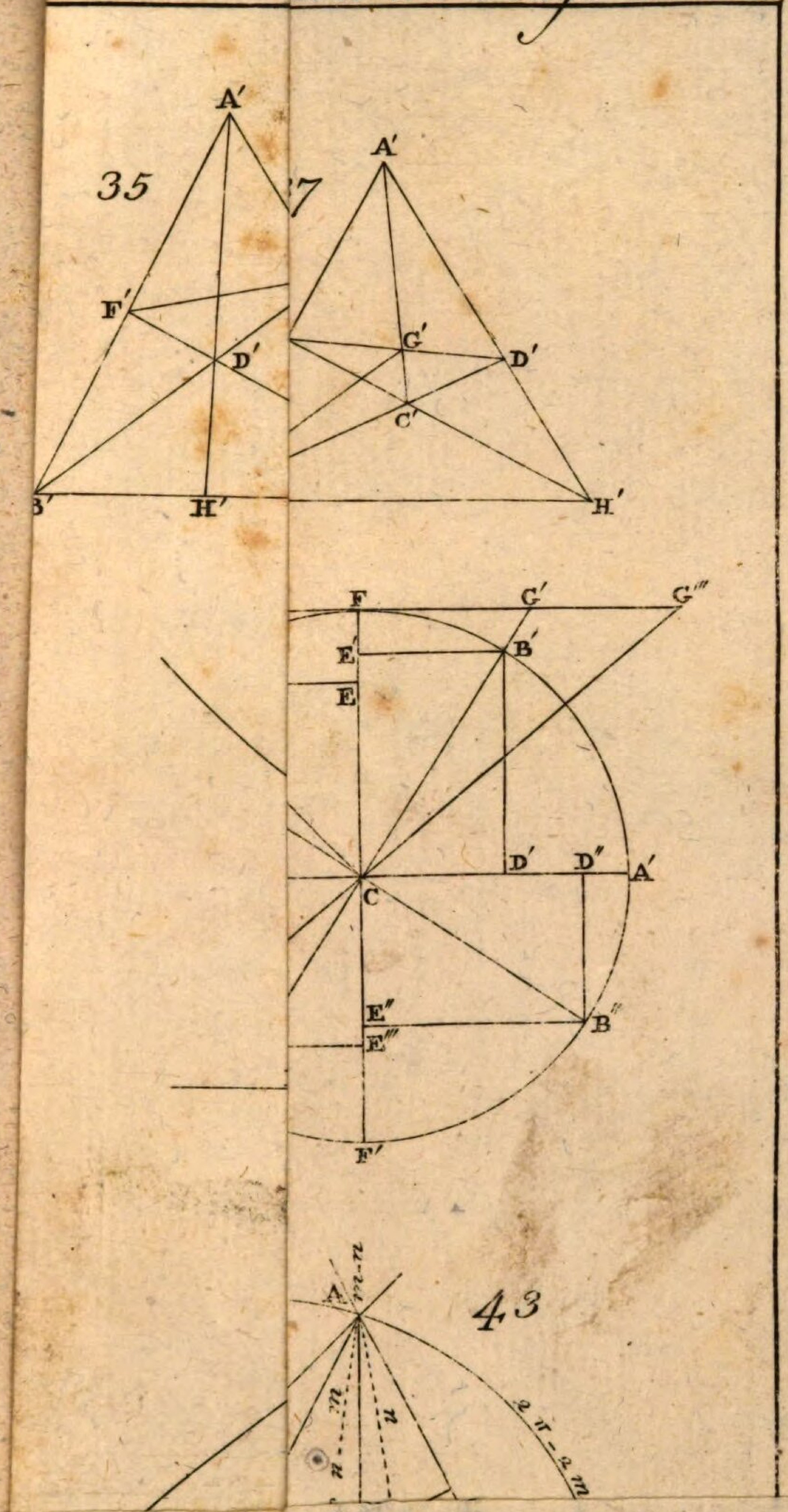
S. 5. Z. 6. v. o. ſtatt leicht iſt, die lies leicht iſt die Vorſtellung.
— 5. — 8. v. o. ſt. ihn l. ſie.
— 28. — 6. v. u. ſt. Ausdruck der Vergleichung l. Maaſsſtab zur Vergl.; eben ſo noch an einigen Stellen nachher, wo wieder Ausdr. der Vergl. vorkommt.
— 32. — 6. v. u. ſt. Kugelſchnitte l. Kegelſchnitte.
— 32. — 3. v. u. ſt. über dieſs im Gegentheil die l. über die, die im Gegentheil ſich.
— 37. — 1. v. o. ſt. Erklärungen l. Entwickelungen.
— 45. — 13. v. u. ſt. Differentien l. Differentiale.
— 60. — 5. ſt. in einem Werke l. mit einem Worte.
— 62. — 14. v. u. ſt. mit der Moral, mit Muthmaſsungen unbeſtimmter Thatſachen lies: mit der moraliſchen Beſchaffenheit der Menſchen, mit Muthmaſsungen, unbeſtimmten Thatſ.
— 63. — 3. v. u. ſt. die auf ſie wirken l. mit denen ſie behaftet ſind.
— 64. — 1. ſt. als Gränze, oder als erſter und letzter Werth l. zur Gränze, oder zum erſten und letzten Werth.
— 64. — 4. ſt. der Gränze l. dieſe Gränze.
— 65. — 7. v. u. ſt. auf 2 Ausdrücke l. auf zwey Glieder.
— 66. { — 15. v. u. ſt. / — 13. v. u. ſt. } Ausdrücke l. Glieder.
— 68. — 9. v. u. ſt. Gröſse l. Quantität.
— 68. — 1. v. u. ſt. daſs er l. daſs es.
— 69. — 4. v. u. in verkehrter l. in inverſer.
— 70. — 6. v. u. ſt. correl. Syſteme, ſo l. correlative Syſteme ſo,
— 72. — 11. v. u. ſt. den letzten Ausdruck afficirt l. mit dem der letzte Ausdruck behaftet iſt.
— 73. — 9. v. o. ſt. Richtung l. Sinn.
— 74. — 14. v. u. ſt. von afficirt l. mit behaftet.
— 75. — 6. v. o. Mittel der V. l. Maaſsſtab zur V.
— 75. — 9. v. u. ſt. Conformität u. Nichtconformität l. Gleichförmigkeit und Ungleichförmigkeit.
— 77. — 10 v. o. ſt. Verrichtung l. Function.
— 81. — 6. v. u. ſt. ſie afficiren l. mit ihnen behaftet ſind.
— 84. — 4. v. o. ſt. bey l. unter.
— 87. — 6. v. o. ſt. laut l. im Laufe.
— 95. — 3. v. u. ſt. den l. das.
— 96. — 3. v. u. ſt. rationel l. rational.

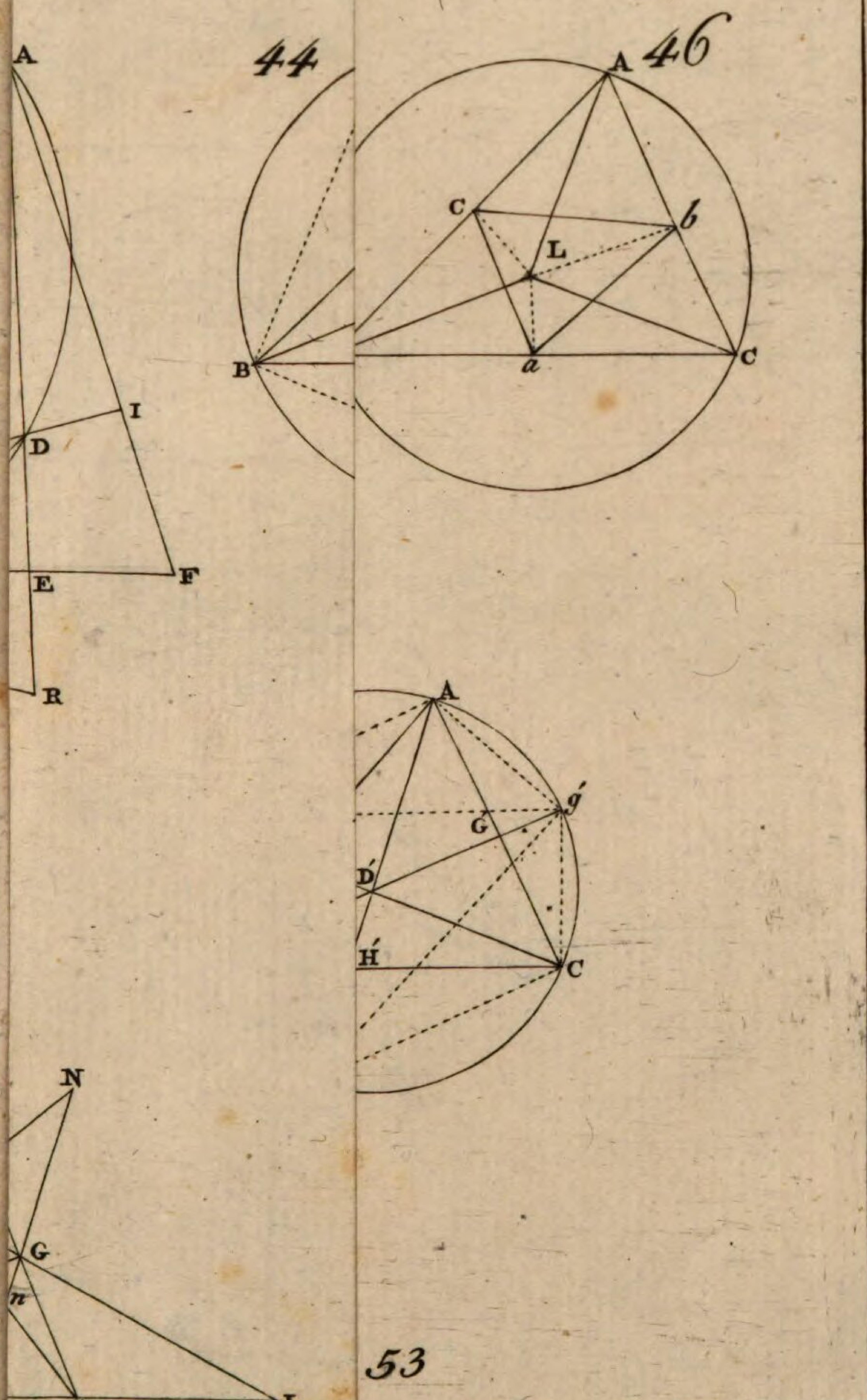
S. 100. Z. 10. v. o. ſt. wie im Fall darauf l. wie im vorhergehenden Fall, darauf.
— 100. — 1. v. u. ſt. nie l. nur.
— 105. — 2. v. u. ſt. Ausdrücke l. Glieder, eben ſo auf der folgenden Seite.
— 116. — 10. v. o. ſt. iſt l. ſey.
— 119. — 12. v. v. u. ſt. der l. die.
— 120. — 15. v. u. ſt. bereits von *A* l. rechts von *B*.
— 121. — 14. v. o. ſt. andere. Weil l. andere, weil.
— 123. — 3. v. u. ſt. der als links l. der, links.
— 126. — 10. v. o. ſt. Boſſüt's l. Boſſut's.
— 128. überall für Frage lies Aufgabe.
— 129. Z. 13. v. u. applicirte l. klare.
— 132. — 12. v. u. ſt. wirklich, gewiſs l. gewiſſe.
— 147. — 7. v. u. ſt. verwirrtes l. verworrenes.
— 149. für Bedeutung l. Sinn.
— 151. Z. 9. v. u. ſt. nie l. nur.
— — — — — ſt. der Reſultate der S. l. ihrer Reſultate, mit denen der S.
— 153. — 7. v. u. ſt. ihm l. ihre.
— 176. — 1. v. u. ſt. auf die andern l. auf die andere.
— 245. — 10. v. u. ſt. mit ihr hat er l. darauf hat er.
— 248. — 7. v. o. ſt. war möglich l. wäre möglich.
— 300. — 1. v. u. ſt. $b\,\frac{\sin B + \sin C + \cos(B+C)}{2\,.\,\sin B}$ lies $b\,\frac{\sin B + \sin C + \sin(B+C)}{\sin B}$.

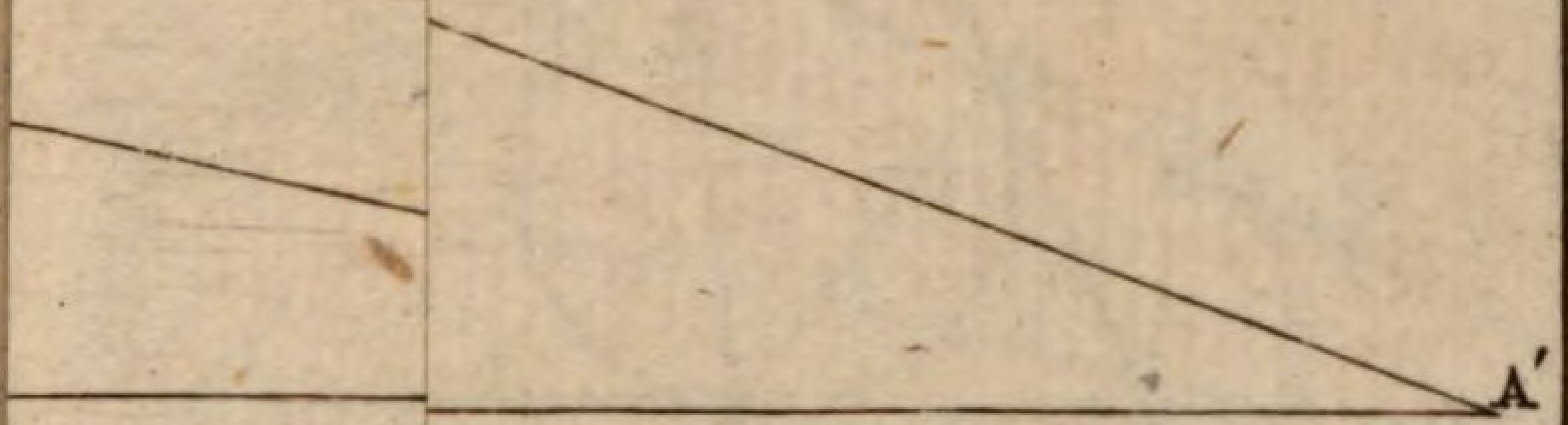
Bayerische Staatsbibliothek München

Geometrie der Lage Tab. I.




35
A′
F′
D′
B′
H′
37
A′
G′
D′
C′
H′
F
G′
G‴
E′
B′
E
D′
D″
A′
C
E″
B″
E‴
F′
43
A
n-m
m
n
2n-2m

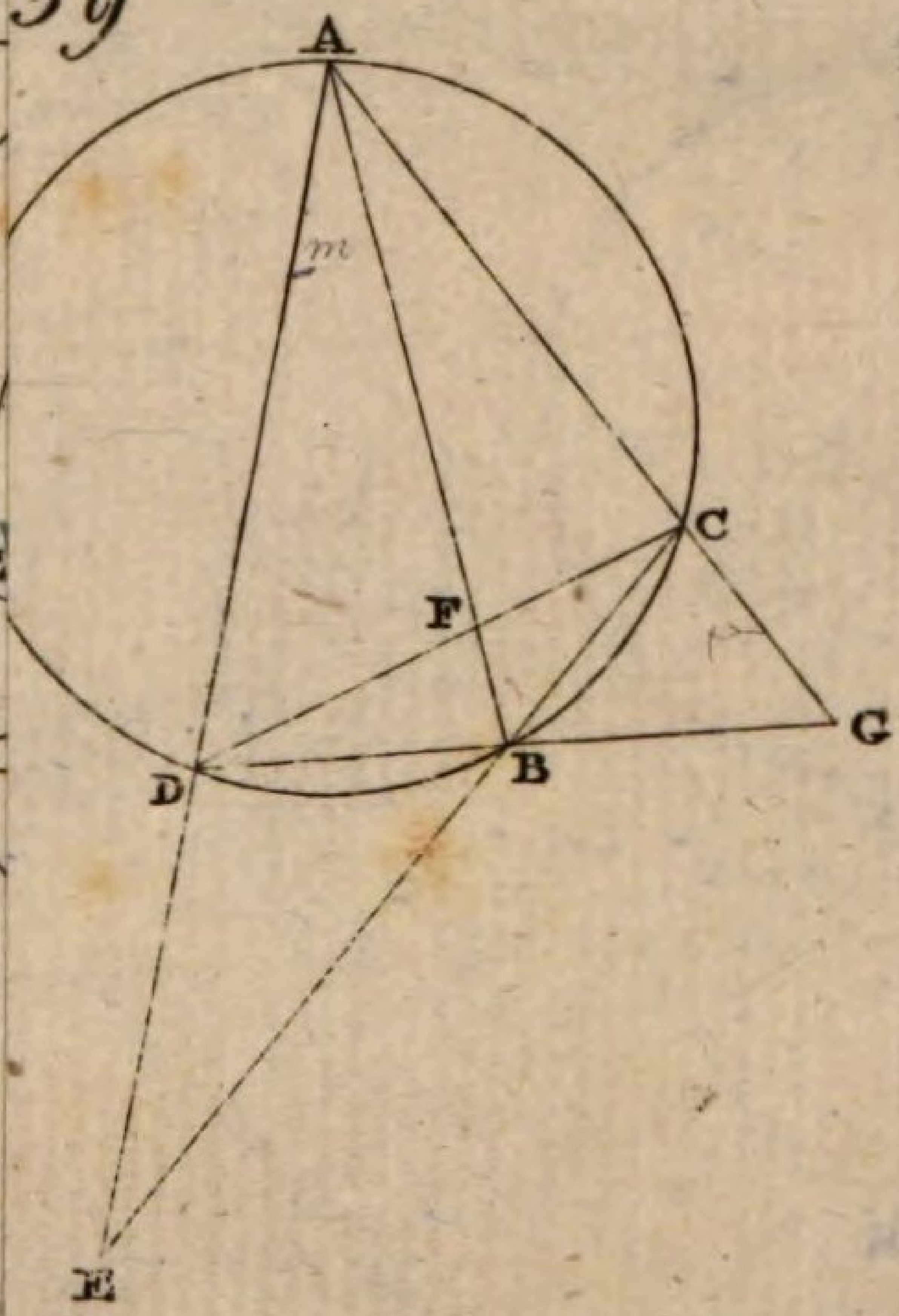

44
46
A
C
b
L
B
a
C
I
D
E
F
R
A
g′
G
D′
H′
C
N
G
n
L
53

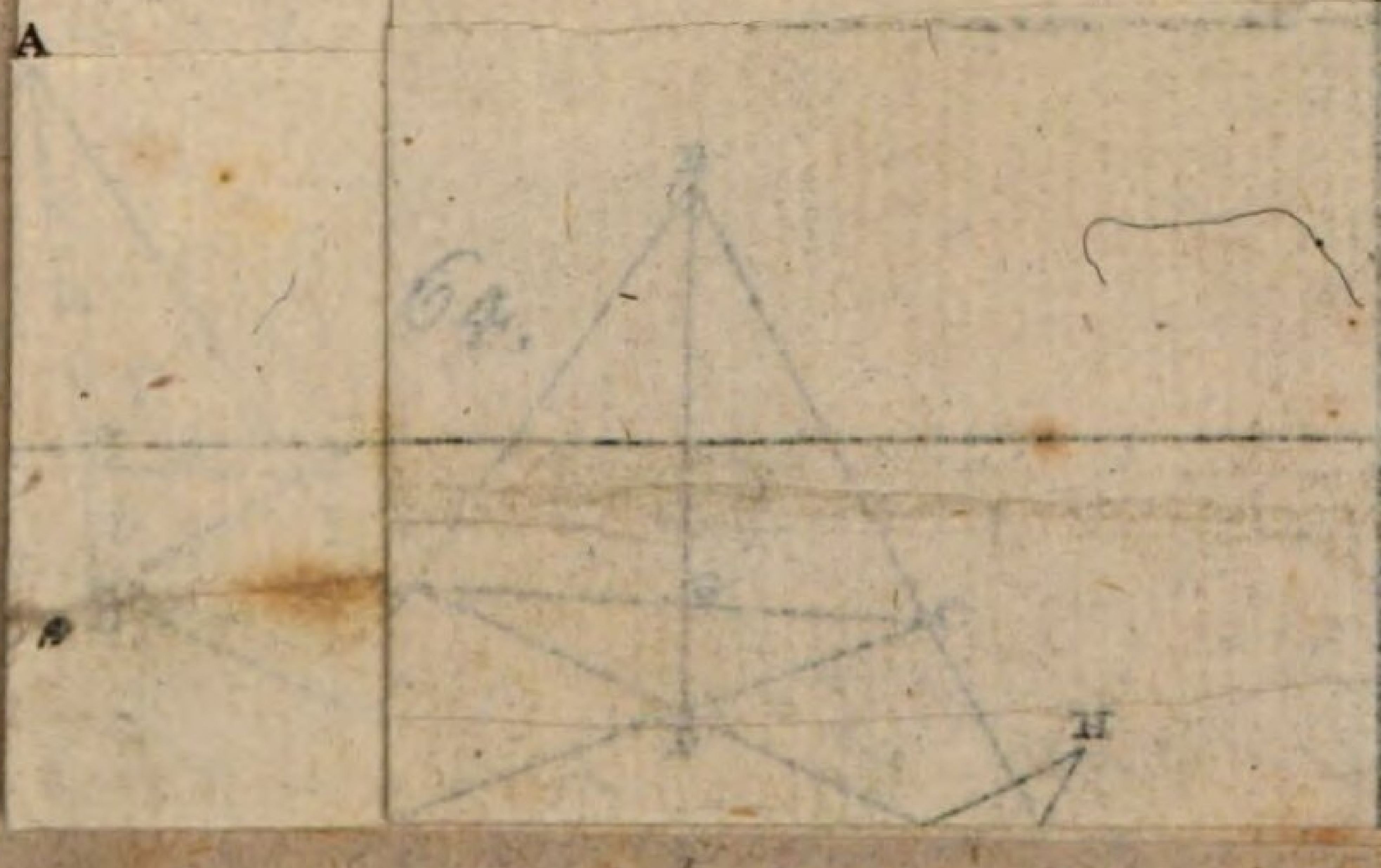


57



59





Bayerische StaatsBibliothek
Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Carnot, Lazare,

Geometrie der Stellung oder über die Anwendung der Analysis auf Geometrie

Bd.: 1

Altona 1810

Math.p. 73 b-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10081581-6